2023,**43A**(1):123–131

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

http://actams.wipm.ac.cn

质量临界非齐次薛定谔方程在门槛值处的极限行为

李德科　王青选*

(浙江师范大学数学与计算机学院　浙江金华 321004)

摘要：该文研究如下与时间无关的具有吸引相互作用的临界非齐次薛定谔方程

$$-\triangle u+|x|^2u-\ am(x)|u|^{\frac{4}{N}}u=\mu u,\quad \text{in } \mathbb{R}^N,\, N\geq 1,$$

其中 $a>0$ 且 $0<m(x)\leq 1$. 取 $\lambda>0$ 及适合的 $0\leq g(x)<1$, 令 $m(x)=1-\lambda g(x)$, 证明该方程在阈值 $a=a^*$ 处基态解的存在性，并给出 $\lambda\to 0^+$ 时基态解的极限行为. 这些结论推广了 Deng, Guo 和 Lu[10,11] 的结果. 特别地，该文使用了一种直接而更简单的方法得到能量的下界.

关键词：非齐次非线性薛定谔方程；质量临界；基态解；极限行为.

MR(2010) 主题分类: 35J20; 35Q40　**中图分类号**：O175.2　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2023)01-123-09

1　引言

本文研究如下具有吸引相互作用的临界非齐次薛定谔方程

$$-\triangle u(x)+|x|^2u(x)-\ am(x)|u(x)|^{\frac{4}{N}}u(x)=\mu u(x),\quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

其中 N 表示维数， $|x|^2$ 是调和位势， $\mu\in\mathbb{R}$ 表示物理模型的化学势， $0<m(x)\leq 1$ 表示空间上非均匀相互作用. 众所周知，方程 (1.1) 的解与具有 $\psi(x,t)=u(x)\mathrm{e}^{-\mu t}$ 形式的含时间非线性薛定谔方程驻波解的存在性相关，它广泛用于玻色 - 爱因斯坦凝聚模型，非线性光纤和平面波导 [1]. 特别地， $N=2$ 且 $m(x)=1$ 对应于立方薛定谔方程. 有关空间非均匀相互作用的玻色 - 爱因斯坦凝聚实验参见文献 [2] 及其引用文献.

方程 (1.1) 也可看成是如下约束变分极小化问题的欧拉 - 拉格朗日方程

$$e(a):=\inf_{u\in\mathcal{H},\,\|u\|_{L^2}^2=1}E_a(u), \tag{1.2}$$

其中 $E_a(u)$ 是如下能量泛函

$$E_a(u):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u(x)|^2+|x|^2|u(x)|^2)\mathrm{d}x-\frac{a}{4/N+2}\int_{\mathbb{R}^N}m(x)|u|^{4/N+2}\mathrm{d}x, \tag{1.3}$$

收稿日期: 2022-03-24; 修订日期: 2022-08-05

E-mail: 202020200467@zjnu.edu.cn; wangqx@zjnu.edu.cn

基金项目：国家自然科学基金 (11801519)

Supported by the NSFC(11801519)

*通讯作者

$\mathcal{H}$ 表示 Hilbert 空间，定义为

$$\mathcal{H}:=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^N):\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|u(x)|^2\mathrm{d}x<\infty\right\}. \tag{1.4}$$

本文主要研究极小化问题 (1.2), 其极小元也称为基态解. 问题 (1.2) 是一个质量临界问题，已经引起了很多关注，可参阅文献 [3–16]. 文献 [8] 中，作者考虑 $m(x)=1$ 时与时间相关的临界非线性薛定谔方程，给出了具体的门槛值为 $\|Q\|_{L^2}^2$, 这里 Q 是如下非线性方程的唯一的径向对称正解

$$-\triangle u(x)+\frac{2}{N}u(x)-|u(x)|^{\frac{4}{N}}u(x)=0,\ \ x\in\mathbb{R}^N,\ u\in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{1.5}$$

利用这个门槛值，他们还研究了问题 (1.2) 基态解的存在性和轨道稳定性. 当 $N=2$ 且 $m(x)\equiv 1$ 时，能量泛函 (1.3) 也被称为 Gross-Pitaevskii 泛函. Guo 和 Seiringer[13] 证明了二维问题门槛值 $a^*>0$ 的存在性，它等价于吸引型玻色 - 爱因斯坦凝聚中临界冷原子数的存在性，在这里 $a^*=\|Q\|_{L^2}^2$, 其中 Q 是方程 (1.5) 的径向对称正解. 此外，他们给出了 $a\nearrow a^*$ 时极小元的爆破结果. 在文献 [5, 14–16] 中也得到了不同位势的其他推广结果.

当 $N=2$ 且 $m(x)\neq 1$ 时， Deng, Guo 和 Lu[10] 考虑 $m(x)$ 满足 $0<m(x)\leq 1$, $m(x)=1-O(|x-x_0|^{q+2})$ $(x\to x_0)$ 的情形，其中 x_0 是 $m(x)$ 的唯一最大值点，也是位势 $V(x)$ 的全局最小值点. 作者证明了极小元存在当且仅当 $0<a<a^*$, 并得到当 $a\nearrow a^*$ 时极小元的质量集中行为. 文献 [11] 表明，取 $m(x)=1-O(|x-x_0|^q)$ $(x\to x_0)$, 当 $0<q<2$ 时，在门槛值 a^* 处极小元存在，但当 $q>2$ 时在 $a=a^*$ 处极小元不存在. 其它关于非齐次薛定谔方程的相关工作，见文献 [6–7, 12].

在文献 [11] 中了解到， $m(x)$ 在最大值点附近的几何性质将影响门槛值 a^* 处极小元的存在性. 一个有趣的问题是，若这个几何性质随着一个参数消失，那么在门槛值 a^* 处极小元会如何变化呢？为此，我们考虑如下 $m(x)$

$$m(x)=1-\lambda g(x),\ \ 0<\lambda<1, \tag{1.6}$$

并且我们假设 $g(x)$ 满足以下条件

(G_1) $g(x)\in C^1(\mathbb{R}^N)$, $0\leq g(x)<1$ 使得 $g(0)=0$, 且 0 是 $g(x)$ 的唯一最小值.

(G_2) 当 $x\to 0$ 时，对任意的 $0<q<2$, 使得 $g(x)=O(|x|^q)$.

在上述假设下，易验证 (1.6) 式的 $m(x)$ 满足

$$0<m(x)\leq 1,\quad m(x)=1-O(|x|^q),\quad m(0)=1=\max_{x\in\mathbb{R}^2}m(x),$$

并且 0 也是调和位势 $|x|^2$ 的最小值点，其中 $0<q<2$. 在本文中，我们主要关注在门槛值 $a=a^*$ 下的情况，因此在下面定理中只书写在门槛值 a^* 时的结论，证明过程可以参考文献 [11] 中定理 1.1.

定理 1.1 设 Q 是 (1.5) 式的唯一径向对称正解，$m(x)$ 定义为 (1.6) 式且满足 (G_1)–(G_2), 则对于任意的 $0<\lambda<1$, 当 $a=a^*=\|Q\|_{L^2}^{\frac{4}{N}}$ 时， $e(a)$ 至少存在一个极小元.

当 $\lambda\to 0^+$ 时， $e(a^*)$ 的极小元的极限行为有如下结论.

定理 1.2 在定理 1.1 条件下，设 $\lambda>0$ 且 $a=a^*=\|Q\|_{L^2}^{\frac{4}{N}}$, 令 u_λ 是 $e(a^*)$ 的非负极小元. 给定序列 $\{\lambda_n\}$, 当 $n\to\infty$ 时 $\lambda_n\to 0^+$, 则存在一子列 (仍记作$\{\lambda_n\}$) 使得相差一个平移的情形下

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n^{\frac{1}{4-p}}u_{\lambda_n}(\lambda_n^{\frac{1}{4-p}}x)=\frac{\gamma Q(\gamma x)}{\|Q\|_{L^2}}\ \text{ 在 } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ 中强收敛}, \tag{1.7}$$

其中 $\gamma > 0$ 为某一常数.

关于当 $a \nearrow a^*$ 时，$e(a)$ 极小元的爆破行为有不少结果，可见文献 [6, 10–11]. 然而，据我们所知，并没有关于门槛值 $a = a^*$ 处极小元极限行为的结论. 我们利用能量方法和爆破分析来完成上述定理的证明. 与文献 [10–11] 中的论证相比，本文采用了一种直接而又简单的方法来得到能量的下界. 此外，由于在门槛值 $a = a^*$ 处存在特殊的变分结构，我们需要通过反证法来完成爆破分析.

2 准备工作

从文献 [4] 可知如下 Gagliardo-Nirenberg（GN）不等式

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{4}{N}+2}\mathrm{d}x \le \frac{2+N}{N\|Q\|_2^{\frac{4}{N}}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{N}}, \tag{2.1}$$

其中 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. 不等式 (2.1) 等号成立当且仅当 $u(x) = Q(|x|)$, 其中 Q 是 (1.5) 式的唯一径向对称正解，并且 Q 满足

$$(1+\frac{2}{N})\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Q|^2\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |Q|^{\frac{4}{N}+2}\mathrm{d}x, \tag{2.2}$$

证明见文献 [7, 引理 8.1.2]. 从文献 [4] 中知 $Q, |\nabla Q| = O(|x|^{\frac{-1}{2}}\mathrm{e}^{-|x|})$ 当 $|x| \to \infty$.

设 $\mathcal{H}$ 定义为 (1.4) 式，如下不等式可参考文献 [8].

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\mathrm{d}x \le \frac{2}{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2|u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}, \quad u \in \mathcal{H}. \tag{2.3}$$

引理 2.1 (带 ϵ 的 Young 不等式) 对任意 $a, b, \epsilon > 0$ 且 $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$ $(r, q \ge 1)$, 则

$$ab \le \epsilon a^r + \frac{(\epsilon r)^{\frac{-q}{r}}}{q} b^q. \tag{2.4}$$

3 定理 1.2 的证明

首先，我们需要得到能量 $e(a^*)$ 关于 λ 的最佳估计.

引理 3.1 设 $m(x) = 1 - \lambda g(x)$, 其中 $g(x)$ 满足 (G_1)–(G_2) 且 $0 < \lambda < 1$, 则存在与 λ 无关的两个常数 $C_1 > 0$ 和 $C_2 > 0$, 使得当 $\lambda \to 0^+$ 有

$$C_1\lambda^{\frac{2}{4-q}} \le e(a^*) \le C_2\lambda^{\frac{2}{4-q}}. \tag{3.1}$$

证 为了证明 (3.1) 式的上界，对于任何 $\tau > 0$, 取试验函数

$$u(x) = \frac{\tau^{N/2}}{\|Q\|_{L^2}}Q(\tau x),$$

其中 Q 是 (1.5) 式的唯一的径向对称正解，则 $\|u\|_{L^2}^2 = 1$. 注意到 (G_1) 和 (G_2), 则存在常数 $M_1 > 0$ 使得

$$g(x) \le M_1|x|^q, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|u(x)|^2\mathrm{d}x&=\frac{\tau^{-2}}{\|Q\|_{L^2}^2}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|Q(x)|^2\mathrm{d}x,\\ \int_{\mathbb{R}^N}g(x)|u(x)|^{4/N+2}\mathrm{d}x&=\frac{\tau^2}{\|Q\|_{L^2}^2}\int_{\mathbb{R}^N}g(\frac{x}{\tau})|Q(x)|^{4/N+2}\mathrm{d}x\\ &\le\frac{M_1\tau^{2-q}}{\|Q\|_{L^2}^2}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^q|Q(x)|^{4/N+2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 $a^*=\|Q\|_{L^2}^{\frac{4}{N}}$ 和 $(1+\frac{2}{N})\|\nabla Q\|_{L^2}^2=\|Q\|_{L^4}^{4/N+2}$ (见 (2.2) 式), 那么有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{a^*}{4/N+2}\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{4/N+2}\mathrm{d}x\\ =&\frac{\tau^2}{\|Q\|_{L^2}^2}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla Q(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{4/N+2}\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)^{4/N+2}\mathrm{d}x\right]=0.\end{aligned}$$

由此得

$$e(a^*)\le E_{a^*}(u(x))=\frac{\tau^{-2}}{\|Q\|_2^2}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|Q(x)|^2\mathrm{d}x+\frac{M_1\tau^{2-q}}{\|Q\|_{L^2}^2}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^q|Q(x)|^{4/N+2}\mathrm{d}x.$$

取 $\tau=\lambda^{-\frac{1}{4-q}}$, 有

$$e(a^*)\le C_2\lambda^{\frac{2}{4-q}}.$$

接下来我们证明 (3.1) 式的下界. 由假设条件 (G_2), 知存在 $R_0>0$ 和 $M_2>0$ 使得

$$g(x)\ge M_2|x|^q,\quad \forall x\in B(0,R_0). \tag{3.2}$$

这意味着 $\forall u\in\mathcal{H}$ 且 $\|u\|_{L^2}^2=1$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N}g(x)|u(x)|^{4/N+2}\mathrm{d}x\ge\int_{B(0,R_0)}g(x)|u(x)|^{4/N+2}\mathrm{d}x\ge M_2\int_{B(0,R_0)}|x|^q|u(x)|^{4/N+2}\mathrm{d}x.$$

因此, 对任意的 $0<r^{1/2}<R_0$ (r 之后确定), 由 G-N 不等式我们有

$$\begin{aligned}E_{a^*}(u)&\ge\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|u(x)|^2\mathrm{d}x+\frac{\lambda a^*}{4/N+2}\int_{\mathbb{R}^N}g(x)|u(x)|^{4/N+2}\mathrm{d}x\\ &=\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^2-r)|u(x)|^2\mathrm{d}x+\frac{\lambda a^*}{4/N+2}\int_{\mathbb{R}^N}g(x)|u(x)|^{4/N+2}\mathrm{d}x\\ &\ge\frac{r}{2}-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[r-|x|^2]_+|u(x)|^2\mathrm{d}x+\lambda a^*M_2\int_{B(0,r^{1/2})}|x|^q|u(x)|^{4/N+2}\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $[\ ]_+$ 表示正部. 注意到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[r-|x|^2]_+|u(x)|^2\mathrm{d}x\\ =&\int_{B(0,r^{1/2})}(r-|x|^2)|u(x)|^2\mathrm{d}x\le\int_{B(0,r^{1/2})}r|u(x)|^2\mathrm{d}x\\ =&\int_{B(0,r^{1/2})}\frac{r}{(\lambda a^*M_2|x|^q)^{\frac{1}{\frac{2}{N}+1}}}(\lambda a^*M_2|x|^q)^{\frac{1}{\frac{2}{N}+1}}|u(x)|^2\mathrm{d}x\\ \le&\frac{C}{(\lambda a^*M_2)^{\frac{N}{2}}}\int_{B(0,r^{1/2})}\frac{r^{1+\frac{N}{2}}}{|x|^{\frac{qN}{2}}}\mathrm{d}x+\lambda a^*M_2\int_{B(0,r^{1/2})}|x|^q|u(x)|^{4/N+2}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中常数 C 是不依赖与 λ. 直接计算得

$$\int_{B(0,r^{1/2})} \frac{r^{1+\frac{N}{2}}}{|x|^{\frac{qN}{2}}} \mathrm{d}x = M_3 r^{1+N-\frac{qN}{4}},$$

对适合的常数 $M_3 > 0$. 结合 (3.3) 式和 (3.4) 式，有

$$E_{a^*}(u) \geq \frac{r}{2} - \frac{M_4}{\lambda^{\frac{N}{2}}} r^{1+N-\frac{qN}{4}},$$

对适合的常数 $M_4 > 0$. 令 $r = C_0 \lambda^{\frac{2}{4-q}}$ 且 C_0 足够小，那么对足够小的 λ 有 $r^{1/2} < R_0$ 使得

$$E_{a^*}(u) \geq (C_0 - M_4 C_0^{1+N-\frac{qN}{4}}) \lambda^{\frac{2}{4-q}}.$$

因此，取足够小的 C_0 使得

$$C_0 - M_4 C_0^{1+N-\frac{qN}{4}} > 0,$$

这蕴含了 $e(a^*)$ 的下界．证毕. ▌

设 $u_\lambda(x)$ 是 $e(a^*)$ 的非负极小元，记 $\epsilon := \lambda^{\frac{1}{4-q}}$, 并定义

$$w_\epsilon := \epsilon^{N/2} u_\lambda(\epsilon x). \tag{3.5}$$

引理 3.2 当 $\lambda \to 0^+$ 时，存在两个与 λ 无关的常数 $K_1, K_2 > 0$, 使得

$$K_1 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_\epsilon|^2 \mathrm{d}x \leq K_2. \tag{3.6}$$

证 因为 $g(x) \geq 0$ 且 $\lambda > 0$, 由 G-N 不等式和 (3.1) 式得

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |u_\lambda(x)|^2 \mathrm{d}x \leq E_{a^*}(u_\lambda) = e(a^*) \leq C_2 \lambda^{\frac{2}{4-q}} \to 0. \tag{3.7}$$

由 (2.3) 式，可得

$$\begin{aligned} 1 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^2 \mathrm{d}x &\leq \frac{2}{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |u_\lambda|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C_3 \lambda^{\frac{1}{4-q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^2 \right)^{1/2} = C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_\epsilon|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

这蕴含了 (3.6) 式的下界.

下面利用反证法证明上界．设存在一子列 $\{\lambda_n\}$ 使得 $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{\epsilon_n}|^2 \mathrm{d}x \to \infty$, 定义

$$v_n(x) := \tau_n^{N/2} w_{\epsilon_n}(\tau_n x) = (\tau_n \epsilon_n)^{N/2} u_{\lambda_n}(\tau_n \epsilon_n x), \quad \text{其中} \quad \tau_n := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{\lambda_n}|^2 \mathrm{d}x \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.8}$$

注意到当 $n \to \infty$ 时，有 $\tau_n \to 0$, $\|v_n\|_{L^2}^2 = \|w_{\lambda_n}\|_{L^2}^2 = 1$ 且 $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \mathrm{d}x = 1$. 根据 (2.1) 式和 (3.1) 式，可得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 - \frac{a^*}{4/N+2} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{4/N+2} \\ &= (\epsilon_n \tau_n)^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{\lambda_n}|^2 - \frac{a^*}{4/N+2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{\lambda_n}|^{4/N+2} \right\} \\ &\leq (\epsilon_n \tau_n)^2 e(a^*) \to 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

因此

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x-\frac{a^*}{4/N+2}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{\frac{4}{N}+2}\mathrm{d}x\to 0, \text{as } n\to\infty.$$

从而，存在不依赖于 n 的常数 $M_1,M_2>0$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n(x)|^2\mathrm{d}x=1,\quad M_1\le\int_{\mathbb{R}^N}|v_n(x)|^{\frac{4}{N}+2}\mathrm{d}x\le M_2. \tag{3.10}$$

根据文献 [9] 中的集中紧原理，存在一序列 $\{y_n\}$ 和正常数 R_0 和 η, 使得

$$\liminf_{\epsilon_n\to 0}\int_{B(0,R_0)}|v_n(x+y_n)|^2\mathrm{d}x\ge\eta>0. \tag{3.11}$$

那么当 n 足够大时，有

$$\int_{B(0,R_0)}|v_n(x+y_n)|^2\mathrm{d}x\ge\frac{\eta}{2}>0. \tag{3.12}$$

根据 Hölder 不等式，得

$$\int_{B(0,R_0)}|v_n(x+y_n)|^2\mathrm{d}x\le\left(\int_{B(0,R_0)}|x|^{-\frac{qN}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{N+2}}\left(\int_{B(0,R_0)}|x|^q|v_n(x+y_n)|^{\frac{2N+4}{N}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{N}{N+2}}.$$

因为 $0<q<2$, 则

$$\int_{B(0,R_0)}|x|^{-\frac{qN}{2}}\mathrm{d}x<\infty,$$

因此可知当 n 充分大时，存在 $\eta_0>0$ 使得

$$\int_{B(0,R_0)}|x|^q|v_n(x+y_n)|^{4/N+2}\mathrm{d}x\ge\eta_0. \tag{3.13}$$

注意到

$$v_n(x+y_n)=(\tau_n\epsilon_n)^{N/2}u_{\lambda_n}(\tau_n\epsilon_n x+\tau_n\epsilon_n y_n),$$

我们证明 $\tau_n\epsilon_n y_n\to 0$. 事实上，反设，若取子列使得对 $M>0$ 有

$$|\tau_n\epsilon_n y_n|\ge M,$$

则当 n 充分大时，有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|u_{\lambda_n}(x)|^2\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^N}|\tau_n\epsilon_n x+\tau_n\epsilon_n y_n|^2|v_n(x+y_n)|^2\mathrm{d}x\\&\ge\int_{B(0,R_0)}|\tau_n\epsilon_n x+\tau_n\epsilon_n y_n|^2|v_n(x+y_n)|^2\mathrm{d}x\\&\ge\frac{M^4}{8}\eta>0,\end{aligned}$$

与 (3.7) 式矛盾．因此，

$$\tau_n\epsilon_n y_n\to 0.$$

根据假设 (G2), 则当 n 足够大时，存在一个常数 $c_1>0$ 使得

$$g(\tau_n\epsilon_n x+\tau_n\epsilon_n y_n)\ge c_1(\tau_n\epsilon_n)^q|x|^q,\quad 0<q<2, \forall x\in B(0,R_0).$$

因此，对充分大的 n 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u_{\lambda_n}(x)|^{\frac{4}{N}+2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{(\tau_n\epsilon_n)^2}\int_{\mathbb{R}^N} g(\tau_n\epsilon_n x+\tau_n\epsilon_n y_n)|v_n(x+y_{\epsilon_n})|^{\frac{4}{N}+2}\mathrm{d}x\\ &\geq \frac{1}{(\tau_n\epsilon_n)^2}\int_{B(0,R_0)} g(\epsilon_n x+\epsilon_n y_{\epsilon_n})|v_n(x+y_n)|^{\frac{4}{N}+2}\mathrm{d}x\\ &\geq \frac{c_1}{(\tau_n\epsilon_n)^{2-q}}\int_{B(0,R_0)} |x|^q|v_n(x+y_n)|^{\frac{4}{N}+2}\mathrm{d}x\\ &\geq \frac{c_1\eta_0}{(\tau_n\epsilon_n)^{2-q}} = \frac{c_1\eta_0}{\tau_n^{2-q}}\lambda_n^{-\frac{2-q}{4-q}}.\ (\text{由 (3.13) 式和 } \epsilon \text{ 的定义})\end{aligned}$$

由此得出

$$e(a^*) \geq \frac{a^*\lambda_n}{4/N+2}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u_{\lambda_n}(x)|^{\frac{4}{N}+2}\mathrm{d}x \geq \frac{a^*}{4/N+2}\frac{c_1\eta_0}{\tau_n^{2-q}}\lambda_n^{\frac{2}{4-q}}.$$

因为 $0<q<2$, 则 $\frac{c_1\eta_0}{\tau_n^{2-q}}\to\infty$, 与 (3.1) 式矛盾．因此我们得到 (3.6) 式的上界．证毕． ▌

定理 1.2 的证明 与 (3.9) 式相同，我们也有

$$0 \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_\epsilon|^2 - \frac{a^*}{4/N+2}\int_{\mathbb{R}^N} |w_\epsilon|^{4/N+2} \leq \epsilon^2 e(a^*) \to 0,$$

结合 (3.6) 式，则存在与 λ 无关的两个常数 $M_1, M_2>0$, 当 $\lambda\to 0^+$ 时，有

$$M_1 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |w_\epsilon|^{4/N+2}\mathrm{d}x \leq M_2. \tag{3.14}$$

当 $a=a^*$ 时， u_λ 满足如下欧拉 - 拉格朗日方程

$$-\triangle u_\lambda + |x|^2 u_\lambda - a^*(1-\lambda g(x))|u_\lambda|^{\frac{4}{N}}u_\lambda = \mu u_\lambda,$$

其中

$$\mu = 2e(a^*) + \frac{2a^*\lambda}{N+2}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u_\lambda|^{4/N+2}\mathrm{d}x - \frac{2a^*}{N+2}\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^{4/N+2}\mathrm{d}x. \tag{3.15}$$

注意到

$$\frac{a^*\lambda}{4/N+2}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u_\lambda|^{4/N+2}\mathrm{d}x \leq e(a^*) \to 0,$$

和

$$\epsilon^2\mu = 2\epsilon^2 e(a^*) + \epsilon^2\frac{2a^*\lambda}{N+2}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u_\lambda|^{4/N+2}\mathrm{d}x - \frac{2a^*}{N+2}\int_{\mathbb{R}^N} |w_\epsilon|^{4/N+2}\mathrm{d}x. \tag{3.16}$$

结合 (3.14) 式，因此，直到一子列，存在常数 $\beta>0$ 使得

$$\epsilon_n^2\mu_n \to -\beta^2. \tag{3.17}$$

根据 w_ϵ 的定义，则 w_{ϵ_n} 满足

$$-\triangle w_{\epsilon_n} + \epsilon^2|x|^2 w_{\epsilon_n} - a^*(1-\lambda g(\epsilon x))|w_{\epsilon_n}|^{\frac{4}{N}}w_{\epsilon_n} = \epsilon_n^2\mu_n w_{\epsilon_n}. \tag{3.18}$$

另一方面，(3.7) 式表明存在与 λ 无关的常数 $M>0$ 使得 $\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|w_\epsilon|^2\leq M$ 成立. 因此，$\{w_\epsilon\}$ 在 $\mathcal{H}$ 上一致有界. 我们知道，嵌入 $\mathcal{H}\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ 对 $2\leq p<2^*$ 是紧的 (见文献 [8]), 其中 2^* 是 Sobolev 临界指标. 因此，直到一子列，存在 $w_0\in L^p(\mathbb{R}^N)$ 使得

$$w_{\epsilon_n}\to w_0,\ \text{in } L^p(\mathbb{R}^N)\ \ \forall\, 2\leq p<2^*. \tag{3.19}$$

根据 (3.8) 式并在 (3.18) 式中取极限，则 w_0 满足

$$-\triangle w_0-\ a^*|w_0|^{\frac{4}{N}}w_0=-\beta^2w_0. \tag{3.20}$$

由 (3.19) 式可得 $w_0\neq 0$, 则从 (1.5) 式的径向对称正解的唯一性 (相差一个平移) 得出结论，并且

$$w_0=\frac{\gamma^{N/2}}{\|Q\|_{L^2}}Q(\gamma x),\qquad \gamma=\sqrt{\frac{2}{N}}\,\beta. \tag{3.21}$$

此外，(3.18) 式和 (3.20) 式分别乘以 w_{ϵ_n} 和 w_0 并做积分，再由 (3.19) 式可得

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_{\epsilon_n}|^2\to\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_0|^2,$$

由此可得

$$w_{\epsilon_n}\to w_0=\frac{\gamma^{N/2}}{\|Q\|_{L^2}}Q(\gamma x),\quad \text{在 } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ 中强收敛}.$$

证毕. ∎

参 考 文 献

[1] Malomed B. Nonlinear Schrödinger Equations//Scott A. Encyclopedia of Nonlinear Science. New York: Routledge, 2005

[2] Belmonte B J, Perez V M, Vekslerchik V, Torres P J. Lie symmetries and solitons in nonlinear systems with spatially inhomogeneous nonlinearities. Phys Rev Lett, 2007, **98**: 064102

[3] Guo Y J, Lu L. Mean-field limit of Bose-Einstein condensates with attractive interactions in $\mathbb{R}^2$. Acta Math Sci, 2016, **36B**(2): 317–324

[4] Weinstein M I. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolations estimates. Commun Math Phys, 1983, **87**: 567–576

[5] Phan T V. Blow-up profile of Bose-Einstein condensate with singular potentials. J Math Physics, 2017, **58**: 072301

[6] Phan T V. Ground state of the mass-critical inhomogeneous nonlinear Schrödinger functional. J Math Anal Appl, 2020, **486**: 1–19

[7] Dinh V D, Keraani S. A compactness result for inhomogeneous nonlinear Schrödinger equations. Nonlinear Anal, 2022, **215**: 1–29

[8] Zhang J. Stability of attractive Bose-Einstein condensates. J Stati Phys, 2000, **101**: 731–746

[9] Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case: Part 1. Ann Inst H Pioncaré, 1984, **4**: 109–145

[10] Deng Y B, Guo Y J, Lu L. On the collapse and concentration of Bose-Einstein condensates with inhomogeneous attractive interactions. Calc Var, 2015, **54**: 99–118

[11] Deng Y, Guo Y, Lu L. Threshold behavior and uniqueness of ground states for mass critical inhomogeneous Schrödinger equations. J Math Phys, 2018, **59**: 011503

[12] Gao Y, Li S. Constraint minimizers of inhomogeneous mass subcritical minimization problems. Math Methods Appl Sci, 2021, **44**: 10062–10075

[13] Guo Y, Seiringer R. On the mass concentration for Bose-Einstein condensation with attractive interactions. Lett Math Phys, 2014, **104**: 141–156

[14] Guo Y, Zeng X, Zhou H. Energy estimates and symmetry breaking in attractive Bose-Einstein condensates with ring-shaped potentials. Ann Inst H Pioncaré Anal Non Linaire, 2016, **33**: 809–828

[15] Wang Q, Zhao D. Existence and mass concentration of 2D attractive Bose-Einstein condensates with periodic potentials, J Diff Equations, 2017, **262**: 2684–2704

[16] Guo Y, Wang Z, Zeng X, Zhou H. Properties of ground states of attractive Gross-Pitaevskii equations with multi-well potentials. Nonlinearity, 2018, **31**: 957–979

[17] Cazenave T. Semilinear Schrödinger Equations Providence: AMS, 2003

Limit Behavior of Mass Critical Inhomogeneous Schrödinger Equation at the Threshold

Li Deke Wang Qingxuan

(*College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Zhejiang Jinhua 321004*)

Abstract: This paper is concerned with the following time-independent critical inhomogeneous Schrödinger equation with attractive interactions:

$$-\triangle u + |x|^2 u - am(x)|u|^{\frac{4}{N}} u = \mu u, \quad \text{in } \mathbb{R}^N,\ N \geq 1.$$

where $a > 0$, $0 < m(x) \leq 1$. We will show the existence of ground states at the threshold $a = a^*$ for $m(x) = 1 - \lambda g(x)$ with $\lambda > 0$ and suitable $0 \leq g(x) < 1$, and then investigate the limit behavior of those threshold ground states as $\lambda \to 0^+$. These conclusions extend the results of Deng-Guo-Lu[10,11]. In particular, compared to the arguments of [10, 11], we use a direct and simpler method to obtain the lower bound of energy.

Key words: Inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation; Mass critical; Ground states solutions; Limit behaviors.

MR(2010) Subject Classification: 35J20; 35Q40