2021,**41A**(6):1830–1837

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

http://actams.wipm.ac.cn

一类非线性动力系统的孤立子波解

[1] 欧阳成 [2] 莫嘉琪*

([1] 湖州师范学院理学院 浙江湖州 313000; [2] 安徽师范大学数学与统计学院 安徽芜湖 241003)

摘要：该文用泛函广义变分迭代方法，研究了一类非线性扰动动力系统. 首先引入一个相应典型系统的孤立子波解. 然后构造一组泛函广义变分式，求出 Lagrange 乘子，最后构造一组变分迭代关系式，由此便得到了原非线性扰动动力系统的渐近行波解.

关键词：动力系统；非线性；孤立子波.

MR(2010) 主题分类：35B25 **中图分类号**：O175.29 **文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2021)06-1830-08

1 引言

孤立子波在光波散射、流体力学、激波、场论、神经网络、量子力学中都有很广泛的应用 [1−8]. 近来，相关学者已经研究了许多求解孤立子波的方法. 例如：齐次平衡法、辅助方程法、双曲函数法、椭圆函数法、 (G'/G) 展开法、 Riccati 函数法、符号计算法等 [9−13]. 当前，求解非线性问题的方法已不断深化. 很多科学研究者，例如 Abid 等 [14], Hovhannisyan 等 [15], Recke 等 [16] 和 Graef 等 [17] 讨论了有关非线性问题. 研究者也对一类非线性问题的激波、孤波、激光脉冲和大气物理等方面的模型作了讨论 [18−29]. 本文是涉及近代物理中的一个被广泛重视的非线性 NNV (Nizhnik-Novikov-Veselov) 动力系统微分模型，利用了有效而简捷的泛函分析广义变分迭代方法得到了系统模型的孤立子波渐近行波解. 这种方法具有广泛的应用前景.

考虑如下类广义非线性 NNV 动力扰动系统模型 [10,11]:

$$p_t + p_{xxx} - a_1 p q_x - a_2 q p_y = \varepsilon F_1(p,q), \tag{1.1}$$

$$p_x - a_3 q_y = \varepsilon F_2(p,q). \tag{1.2}$$

上式中 $\varepsilon > 0$ 为摄动参数，t, x, y 分别为时间和空间变量，$a_i (i = 1,2,3)$ 为常数，$F_i (i = 1,2)$ 为扰动函数，它为其变量在对应区域内是充分光滑有界函数. 事实上，在流体力学、凝聚态物理、光学和理论物理等学科中的很多应用问题都涉及到上述两个变量函数 p, q 的三阶偏微

收稿日期: 2020-07-22; 修订日期: 2021-04-22

E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金 (11771005) 和浙江省自然科学基金 (LY13A010005, KJ2018A0964, KJ2017A901)
Supported by the NSFC(11771005) and the NSF of Zhejiang Province(LY13A010005, KJ2018A0964, KJ2017A901)

* 通讯作者

分系统模型．一般来说，对于这类偏微分系统模型，难以得到其精确解的解析表示式．本文用一个简捷而有效的泛函分析变分原理的方法来求得模型 (1.1)–(1.2) 的解析的行波渐近解．

先对模型 (1.1)–(1.2) 作如下行波变换

$$z = b_1 x + b_2 y + b_1 t, \tag{1.3}$$

上式中 b_i $(i = 1, 2, 3)$ 为常数．由 (1.1)–(1.2) 式便得到关于 z 的广义非线性动力系统：

$$b_1^3 p_{zzz} - b_3 p_z - a_1 b_1 p q_z - a_2 b_1 q p_z = \varepsilon F_1(p, q), \tag{1.4}$$

$$b_1 p_z - a_3 b_1 q_z = \varepsilon F_2(p, q). \tag{1.5}$$

2 典型非线性动力系统模型

现先考虑系统 (1.4)–(1.5) 中的扰动项 $F_1(p,q) = 0, F_2(p,q) = 0$ 的典型非线性 NNV 动力系统模型的情形：

$$b_1^3 p_{zz} - b_3 p_z - a_1 b_1 p q_z - a_2 b_2 q p_z = 0, \tag{2.1}$$

$$b_1 p_z - a_3 b_2 q_z = 0. \tag{2.2}$$

由 (2.1)–(2.2) 式得到

$$b_1^3 p_{zz} - b_3 p - \frac{b_1(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{2a_3 b_2} p^2 + D_2 p = D_1,$$

$$q = \frac{b_1}{a_3 b_2} p + D_2.$$

上式中 D_1, D_2 为任意常数，不妨设其为零，于是

$$b_1^3 p_{zz} - b_3 p - \frac{b_1(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{2a_3 b_2} p^2 = 0, \tag{2.3}$$

$$q = \frac{b_1}{a_3 b_2} p. \tag{2.4}$$

再用双曲函数待定系数法来求得方程 (2.3) 的孤立子波解．设

$$p(z) = A_1 \operatorname{sech} z + A_2 \operatorname{sech}^2 z + B_0 \tanh z, \tag{2.5}$$

上式中 A_1, A_2, B_0 为待定常数．由 (2.5) 式，有

$$p_z = -A_1 \operatorname{sech} z \tanh z - 2A_2 \operatorname{sech}^2 z \tanh z + B_0 \tanh\ z, \tag{2.6}$$

$$p_{zz} = A_1 \operatorname{sech} z + 4A_2 \operatorname{sech}^2 z - 2A_1 \operatorname{sech}^3 z - 6A_2 \operatorname{sech}^4 z - 2B_0 \operatorname{sech}^2 z \tanh z. \tag{2.7}$$

将 (2.5)–(2.7) 式代入 (2.3) 式，合并同类项并令对应项系数为零得

$$(b_1^3 - b_3)A_1 = 0, \quad (4b_1^3 - b_3)A_2 - \frac{b_1(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{2a_3 b_2} A_1^2 + B_0^2 = 0,$$

$$(\frac{b_1(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{2a_3 b_2} A_2 + b_1^3)A_1 = 0, \quad \frac{b_1(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{2a_3 b_2} A_2^2 + 6b_1^3 A_2 = 0,$$

$$b_3B_0=0,\quad \frac{b_1(a_1b_1+a_2b_2)}{2a_3b_2}B_0^2=0.$$

因此得到

$$A_1=0,\quad A_2=-\frac{12a_3b_1^2b_2}{a_1b_1+a_2b_2},\quad B_0=0,\quad b_3=4b_1^3.$$

由此便得到行波变换 (1.3) 为

$$z=b_1x+b_2y-4b_1^3t. \tag{2.8}$$

于是由 (2.5) 式，得到系统 (2.3)–(2.4) 的一组孤立子波解 $p=U(z),q=V(z)$:

$$U(z)=-\frac{12a_3b_1^2b_2}{a_1b_1+a_2b_2}\mathrm{sech}^2z, \tag{2.9}$$

$$V(z)=-\frac{12b_1^3}{a_1b_1+a_2b_2}\mathrm{sech}^2z. \tag{2.10}$$

取 $a_1=-1,a_2=1,a_3=3,b_1=1,b_2=2$, 由 (2.9) 和 (2.10) 式可分别决定 $p=U(z)$, $q=V(z)$ 的孤立子波曲线如图 1, 图 2 所示.

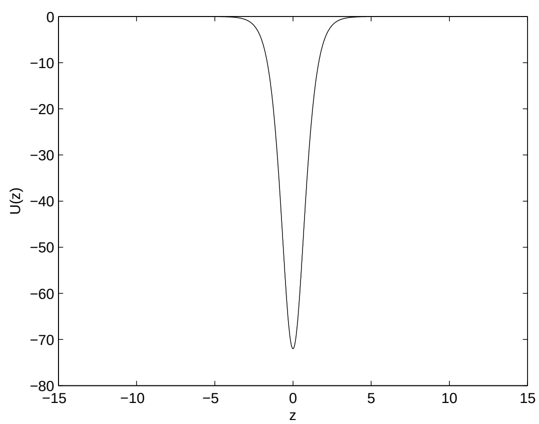

图 1　孤立子波 $U(z)$ 的曲线 $(a_1=-1,a_2=1,a_3=3,b_1=1,b_2=2)$

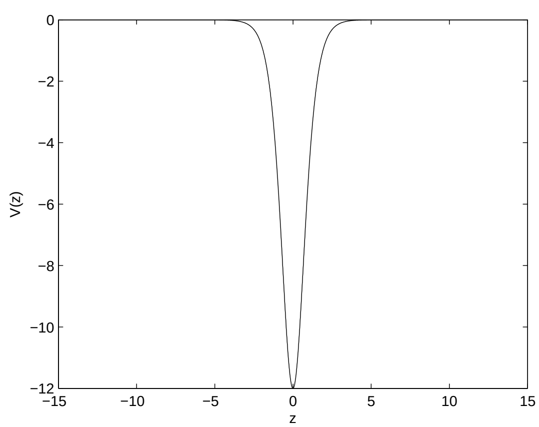

图 2　孤立子波 $V(z)$ 的曲线 $(a_1=-1,a_2=1,a_3=3,b_1=1,b_2=2)$

3 广义扰动动力系统 (1.4)–(1.5) 渐近解

在上一节中，我们是对典型非线性 NNV 系统模型求出了其行波解．现在用泛函分析广义变分法来构造非线性扰动动力系统 (1.4)–(1.5) 的渐近解.

先引入一组泛函 $M_i[p,q](i=1,2)$ (参见文献 [30, 31]):

$$M_1[p,q]=p-\int_{-\infty}^{\tau}\lambda_1(r)[b_1^3p_{rrr}-b_3p_r-a_1b_1\overline{pq}_r-a_2b_2\overline{qp}_r-\varepsilon F_1(\overline{p},\overline{q})]\mathrm{d}r, \tag{3.1}$$

$$M_2[p,q]=q-\int_{-\infty}^{\tau}\lambda_2(r)[b_1p_r-a_3b_2q_r-\varepsilon F_2(\overline{pq})]\mathrm{d}r, \tag{3.2}$$

上式 $\overline{p},\overline{q}$ 分别为 p,q 的限制变量 [30,31], $\lambda_i\ (i=1,2)$ 是 Lagrange 乘子.

计算泛函 (3.1)–(3.2) 的广义变分 $\delta M_i\ (i=1,2)$:

$$\begin{aligned}\delta M_1=&\ \delta p-[\lambda_1(b_1^3\delta p-b_3\delta p)]|_{r=z}+[\lambda_{1r}b_1^3\delta p_r]|_{r=z}+[\lambda_{1rr}b_1^3\delta p]|_{r=z}\\&+\int_{-\infty}^{z}[b_1^3\lambda_{1rrr}-b_3\lambda_{1r}]\delta p\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

$$\delta M_2=\delta q+a_3b_2[\lambda_2\delta q]|_{r=z}+\int_{-\infty}^{z}\lambda_{2r}\delta q\mathrm{d}r.$$

按照泛函分析变分原理 [30,31], 令 $M_i\ (i=1,2)$ 的广义变分为零 $\delta M_i=0\ (i=1,2)$, 可得

$$b_1^3\lambda_{1rrr}-b_3\lambda_1=0,\quad \lambda_1|_{r=z}=\lambda_{1r}|_{r=z}=0,\quad \lambda_{1rr}|_{r=z}=\frac{1}{b_1^3}, \tag{3.3}$$

$$\lambda_{2r}=0,\quad \lambda_2|_{r=z}=-\frac{1}{a_3b_2}. \tag{3.4}$$

显然由 (3.3)–(3.4) 式有

$$\lambda_1(r)=\sum_{i=1}^{3}C_i\exp(\delta_ir),\quad \lambda_2(r)=-\frac{1}{a_3b_2}, \tag{3.5}$$

其中

$$\delta_1=\sqrt[3]{4},\quad \delta_2=\frac{\sqrt[3]{4}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})}{2},\quad \delta_3=\frac{\sqrt[3]{4}(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})}{2}, \tag{3.6}$$

$$C_1=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}a_1^2},\quad C_2=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{6\sqrt[3]{4}a_1^2},\quad C_3=\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{6\sqrt[3]{4}a_1^2}. \tag{3.7}$$

由 (3.1)–(3.5) 式，构造系统 (1.4)–(1.5) 孤立子波渐近解的迭代关系式 $(n=0,1,\cdots)$:

$$\begin{aligned}p_{n+1}(z)=p_n(z)-\int_{-\infty}^{z}\left[\sum_{i=1}^{3}C_i\exp(\delta_ir)\right][b_1^3(p_{nrrr}-4p_{nr})\\-a_1b_1p_nq_{nr}-a_2b_2p_{nr}-\varepsilon F_1(p_n,q_n)]\mathrm{d}r,\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$q_{n+1}(z)=q_n(z)-\frac{1}{a_3b_2}\int_{-\infty}^{z}[b_1p_{nr}-a_3b_2q_{br}-\varepsilon F_2(p_n,q_n)]\mathrm{d}r, \tag{3.9}$$

上式中 δ_i,C_i 由 (3.6) 和 (3.7) 式表示， $(p_0(z),q_0(z))$ 为系统 (1.4)–(1.5) 的孤立子波渐近解的初始迭代.

现取孤立子波渐近解的初始迭代为系统 (1.4)–(1.5) 的一组孤立子波解 (2.9)–(2.10). 即

$$p_0(z)=-\frac{12a_3b_1^2b_2}{a_1b_1+a_2b_2}\mathrm{sech}^2z, \tag{3.10}$$

$$q_0(z)=-\frac{12b_1^3}{a_1b_1+a_2b_2}\mathrm{sech}^2z, \tag{3.11}$$

由迭代式 (3.8), (3.9), 依次可得到序列 $(p_n(z),q_n(z))$. 再由泛函分析不动点理论不难证明 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}q_n$ 在 $z\in[-M,M]$ 上一致地成立 [32,33], 上式中 M 为任意大的正常数.

由迭代式 (3.8), (3.9), 取 $p(z)=\lim\limits_{n\to\infty}p_n(z),q(z)=\lim\limits_{n\to\infty}q_n(z)$. 显然它就是微分系统 (1.4)–(1.5) 的一组孤立子波精确解 [30,31]. 因此行波变换式 (2.8), $(p(b_1x+b_2y-4b^3t)$, $q(b_1x+b_2y-4b^3t))$ 就是非线性广义扰动动力系统模型 (1.1)–(1.2) 的一组孤立子波行波解. 而且 $(p_n(b_1x+b_2y-4b^3t),q_n(b_1x+b_2y-4b^3t))$ 就是非线性广义扰动动力系统模型 (1.1)–(1.2) 的一组第 n 次孤立子波行波渐近解, 再由泛函分析变分原理的 Eular 定理 [32−33] 知, 本方法得到的渐近解具有较高的近似度.

4 例子

考虑如下的一个特殊的动力系统模型

$$p_z(t)+p_{zzz}+pq_z-qp_z=\varepsilon\sin p, \tag{4.1}$$

$$-p_z-3q_z=\varepsilon\cos q, \tag{4.2}$$

由 (3.10)–(3.11) 式, 动力系统 (4.1)–(4.2) 的一个孤立子波渐近解的初始近似 $(p_0(z),q_0(z))$ 是

$$p_0(z)=-36\mathrm{sech}^2z, \tag{4.3}$$

$$q_0(z)=-12\mathrm{sech}^2z. \tag{4.4}$$

用泛函分析广义变分迭代法, 由 (3.8)–(3.9) 式可得动力系统模型 (4.1)–(4.2) 孤立子波渐近解的一次渐近解 $(p_1(z),q_1(z))$ 为

$$p_1(z)=-36\mathrm{sech}^2z+\varepsilon\int_{-\infty}^{z}\left[\sum_{i=1}^{3}C_i\exp(\delta_ir)\right]\sin(-36\mathrm{sech}^2r)\mathrm{d}r-\varepsilon\sin p_0, \tag{4.5}$$

$$q_1(z)=-12\mathrm{sech}^2z+\varepsilon\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z}[\cos(12\mathrm{sech}^2r)]\mathrm{d}r-\varepsilon\cos q_0, \tag{4.6}$$

上式中 $\delta_1=\sqrt[3]{4}$, $\delta_2=\frac{\sqrt[3]{4}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})}{2}$, $\delta_3=\frac{\sqrt[3]{4}(-1+-\sqrt{3}\mathrm{i})}{2}$, $C_1=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$, $C_2=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{6\sqrt[3]{4}}$, $C_3=-\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{6\sqrt[3]{4}}$.

再由迭代式 (3.8)–(3.9) 和 (4.5)–(4.6), 可得到系统模型 (4.1)–(4.2) 的一组孤立子波的二阶渐近解 $(p_2(z),q_2(z))$:

$$\begin{aligned}p_2(z)=&-36\mathrm{sech}^2z+\varepsilon\int_{-\infty}^{z}\left[\sum_{i=1}^{3}C_i\exp(\delta_ir)\right]\sin(-36\mathrm{sech}^2r)\mathrm{d}r\\&-\int_{-\infty}^{z}\left[\sum_{i=1}^{3}C_1\exp(\delta_ir)\right][a_{i=1}^3(p_{1rrr}-4p_{1r})+p_1q_{1r}-2q_1-\varepsilon\sin p_1]\mathrm{d}r,\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$q_2(z) = -12\mathrm{sech}^2 z + \varepsilon\int_{-\infty}^{z}[\cos(12\mathrm{sech}^2 r)]\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^{z}[b_1 p_{1r} - a_3 b_2 q_{1r} - \varepsilon\cos q_1]\mathrm{d}r. \quad (4.8)$$

上式中 p_1, q_1 由 (4.5), (4.6) 式表示.

由 (2.8) 式利用行波变换式 $s = x + 2y - 4t$ 代入 (4.5)–(4.8) 式，便得到非线性广义扰动动力系统模型 (4.1)–(4.2) 的孤立子波一阶、二阶渐近行波解 $(p_{1asy}(x,y,t), q_{1asy}(x,y,t))$ 及 $(p_{2asy}(x,y,t),\ q_{2asy}(x,y,t))$:

$$\begin{aligned}
p_{1asy}(x,y,t) = {} & -36\mathrm{sech}^2(x+2y+4t) \\
& +\varepsilon\int_{-\infty}^{(x+2y+4t)}\left[\sum_{i=1}^{3}C_i\exp(\delta_i r)\right]\sin(-36\mathrm{sech}^2(x+2y+4t))\mathrm{d}r - \varepsilon\sin p_0, \\
q_{1asy}(x,y,t) = {} & -12\mathrm{sech}^2(x+2y+4t) + \varepsilon\int_{-\infty}^{x+2y+4t}[\cos(12\mathrm{sech}^2 r)]\mathrm{d}r - \varepsilon\cos q_0, \\
p_{2asy}(x,y,t) = {} & -36\mathrm{sech}^2(x+2y+4t) + \varepsilon\int_{-\infty}^{x+2y+4t}\left[\sum_{i=1}^{3}C_i\exp(\delta_i r)\right]\sin(-36\mathrm{sech}^2 r)\mathrm{d}r \\
& -\int_{-\infty}^{x+2y+4t}\int_{-\infty}^{x+2y+4t}[a_{i=1}^{3}(p_{1rrr} - 4p_{1r}) + p_1 q_{1r} - 2q_1 - \varepsilon\sin p_1]\mathrm{d}r, \\
q_{2asy}(x,y,t) = {} & -12\mathrm{sech}^2(x+2y+4t) + \varepsilon\int_{-\infty}^{x+2y+4t}[\cos(12\mathrm{sech}^2 r)]\mathrm{d}r \\
& -\int_{-\infty}^{x+2y+4t}[b_1 p_{1r} - a_3 b_2 q_{1r} - \varepsilon\cos q_1]\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

上式中 p_1, q_1 分别由 (4.5), (4.6) 式表示.

继续用本泛函分析变分迭代法，可以得到非线性广义扰动动力系统模型 (4.1)–(4.2) 的一组任意 n 次孤立子波 $p_{nasy}(x,y,t), q_{nasy}(x,y,t)$ 渐近行波解. 由摄动理论和变分原理 [32,33] 知，得到的渐近解在自变量任意的有限的区域内的 n 次孤立子波渐近行波解 $p_{nasy}(x,y,t)$, $q_{nasy}(x,y,t)$ 与系统模型的精确解 $p(x,y,t), q(x,y,t)$ 有如下的渐近估计式：

$$\begin{aligned}
p(x,y,t) &= p_{nasy}(x,y,t) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\
q(x,y,t) &= q_{nasy}(x,y,t) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad 0 < \varepsilon \ll 1.
\end{aligned}$$

5 结论

广义泛函分析变分迭代法求扰动动力系统模型的孤立子波的渐近解是一个简捷有效的方法. 由它得到的渐近解不同于简单的离散数值解. 因为它还可以进行解析运算，它还可继续对模型解作定性，定量的分析. 例如通过广义扰动动力系统模型的孤立子波的渐近解，进行某些微分，积分等解析运算，可以得到其它相关的物理量，从而扩大了对相应物理量的研究范围. 另外，本文选取初始近似是用非扰动情形下的典型系统的孤立子波解. 它决定了广义扰动动力系统模型比较快地得对应的孤立子波在所要求的精度范围内的渐近解析解.

参 考 文 献

[1] McPhaden M J, Zhang D. Slowdown of the meridional overturning circulation in the upper Pacific ocean. Nature, 2002, **415**: 603–608

[2] Gu D, Philander S G H. Interdecadal climate fluctuations that depend on exchanges between the tropics and extratropics. Science, 1997, **275**(7): 805–807

[3] 马松华，强继业，方建平. (2+1) 维 Boiti-Leon-Pempinelli 系统的混沌行为及孤立子波间的相互作用. 物理学报， 2007, **56**: 620–626

Ma S H, Qiang J Y, Fang J P. The interaction between solitons and chaotic behaviours of (2+1)-dimensional Boiti-Leon-Pempinelli system. Acta Phys Sin, 2007, **56**: 620–626

[4] Loutsenko I. The variable coefficient Hele-Shaw problem, integrability and quadrature identities. Comm Math Phys, 2006, **268**(2): 465–479

[5] Gedalin M. Low-frequency nonlinear stationary waves and fast shocks: hydrodynamical description. Phys Plasmas, 1998, **5**(1): 127–132

[6] Parkes E J. Some periodic and solitary travelling-wave solutions of the short-pulse equation. Chaos Solitons Fractals, 2008, **38**(1): 154–159

[7] 潘留仙，左伟明，颜家壬. Landau-Ginzburg-Higgs 方程的微扰理论. 物理学报， 2005, **54**(1): 1–5

Pan L X, Zuo W M, Yan J R. The theory of the perturbation for Landau-Ginzburg-Higgs equation. Acta Phys Sin, 2005, **54** (1): 1–5

[8] 吴国将, 韩家骅, 史良马, 张苗. 一般变换下双 Jacobi 椭圆函数展开法及应用. 物理学报，2006, **55**(8): 3858–3863

Wu G J, Han J H, Shi L M, Zhang M. Double Jacobian elliptic function expansion method under a general function transform and its applications. Acta Phys Sin, 2006, **55**(8): 3858–3863

[9] 马松华, 吴小红, 方建平, 郑春龙. (3+1) 维 Burgers 系统的新精确解及其特殊孤立子波结构. 物理学报， 2008, **57**(1): 11–17

Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L. New exact solutions and special soliton structures for the (3+1)-dimensional Burgers system. Acta Phys Sin, 2008, **57**(1): 11–17

[10] 李帮庆，马玉兰. (G'/G) 展开法和 (2+1) 维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统的新精确解. 物理学报， 2009, **58**(7): 4373–4378

Li B Q, Ma Y L. (G'/G)-expansion method and new exact solutions for (2+1)-dimensional asymmetrical Nizhnik-Novikov-Veselov system. Acta Phys Sin, 2009, **58**(7): 4373–4378

[11] 周振春，马松华, 方建平, 任清褒. (2+1) 维孤立子波系统的多孤立子波解和分形结构. 物理学报， 2010, **59**(11): 7540–7545

Zhou Z C, Ma S H, Fang J P, Ren Q B. Multi-soliton solutions and fractal structures in a (2+1)-dimensional soliton system. Acta Phys Sin, 2010, **59**(11): 7540–7545

[12] 高亮，徐伟，唐亚宁，申建伟. 一类广义 Boussinesq 方程和 Boussinesq-Burgers 方程新的显式精确解. 物理学报， 2007, **56**(4): 1860–1869

Gao L, Xu W, Tang Y Y, Shen J W. New explicit exact solutions of one type of generalized Boussinesq equations and the Boussinesq-Burgers equation. Acta Phys Sin, 2007, **56**(4): 1860–1869

[13] 李向正，李修勇，赵丽英，张金良. Gerdjikov-Ivanov 方程的精确解. 物理学报， 2008, **57**(4): 2031–2034

Ling X Z, Li X Y, Zhao L Y, Zhang J L. Exact solutions of Gerdjikov-Ivanov equation. Acta Phys Sin, 2008, **57**(4): 2031–2034

[14] Abid I, Jleli M, Trabelsi N. Weak solutions of quasilinear biharmonic problems with positive, increasing and convex nonlinearities. Anal Appl Singap, 2008, **6**(3): 213–227

[15] Hovhannisyan G, Vulanovi R. Stability inequalities for one-dimensional singular perturbation problems. Nonlinear Stud, 2008, **15**(4): 297–322

[16] Recke L, Omel'chenko O E. Boundary layer solutions to problems with infinite-dimensional singular perturbations. J Differential Equations, 2008, **245**(12): 3802–2822

[17] Graef J R, Kong L. Solutions of second order multi-point boundary value problems. Math Proc Camb Philo Soc, 2008, **145**(2): 489–510

[18] Mo J Q. Singular perturbation for a class of nonlinear reaction diffusion systems. Science in China Ser A, 1989, **32**(11): 1306–1315

[19] Mo J Q, Lin W T. Asymptotic solution for a class of sea-air oscillator model for El-Nino-southern oscillation. Chin Phys, 2008, **17**(1): 370–372

[20] Mo J Q, Lin W T. Asymptotic solution of activator inhibitor systems for nonlinear reaction diffusion equations. J Sys Sci & Complexity, 2008, **20** (1): 119–128

[21] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T, Chen L H. Perturbed solving method for interdecadal sea-air oscillator model. Chin Geographical Sci, 2012, **22**(1): 42–47

[22] Mo J Q. Variational iteration solvi ng method for a class of generalized Boussinesq equation. Chin Phys Lett, 2009, **26**(6): 060202

[23] Mo J Q. Homotopiv mapping solving method for gain fluency of a laser pulse amplifier. Science in China Ser G, 2009, **52**(7): 1007–1010

[24] Mo J Q, Lin W T, Wang H. Variational iteration solution of a sea-air oscillator model for the ENSO. Progress in Natural Science, 2007, **17**(2): 230–232

[25] 欧阳成，姚静荪，石兰芳，莫嘉琪．一类尘埃等离子体孤子解．物理学报， 2014, **63**(11): 110203
Ouyang C, Yao J S, Shi L F, Mo J Q. Solitary wave solution for a class of dusty plasma. Acta Phys Sin, 2014, **63**(11): 110203

[26] 欧阳成，陈贤峰，莫嘉琪．广义扰动 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统的孤波解的孤波解．系统科学与数学， 2017, **37**(3): 908–917
Ouyang C, Chen X F, Mo J Q. The solutions to solitary wave for generalized disturbed Nizhnik-Novikov-Veselov system. J Syst Sci Math Sci, 2017, **37**(3): 908–917

[27] 欧阳成，姚静荪，石兰芳，莫嘉琪．一类广义鸭轨迹系统轨线的构造．物理学报， 2012, **61**(3): 030202
Ouyang C, Yao J S, Shi L F, Mo J Q. Constructing path curve for a class of generalized phase tracks of canard system. Acta Phys Sin, 2012, **61**(3): 030202

[28] 欧阳成，林万涛，程荣军，莫嘉琪．一类厄尔尼诺海 - 气时滞振子的渐近解．物理学报， 2013, **62**(6): 060201
Ouyang C, Lin W T, Cheng R J, Mo J Q. A class of asymptotic solution of sea-air time delay oscillator for the El Nino-southern oscillation mechanism. Acta Phys Sin, 2013, **62**(6): 060201

[29] Ouyang C, Cheng L H, Mo J Q. Solving a class of burning disturbed problem with shock layer. Chin Phy B, 2012, **21**(5): 050203

[30] de Jager E M, Jiang F R. The Theory of Singular Perturbation. Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1996

[31] Barbu L, Morosanu G. Singularly Perturbed Boundary-Value Problems. Basel: Birkhauser, 2007

[32] He J H. Variational iteration method—a kind of nonlinear analytical technique: Some examples. International J Non-linear Mechanics, 1999, **34**(4): 699–708

[33] He J H, Wu X H. Construction of solitary solution and compacton-like solution by variational iteration method. Chaos Solitions & Fractals, 2006, **29**(1): 108–113

The Solitary Wave Solution to a Class of Nonlinear Dynamic System

[1]Ouyang Cheng [2]Mo Jiaqi

([1]*Faculty of Science, Huzhou University, Zhejiang Huzhou 313000;*
[2]*School of Mathematics and Statistic, Anhui Normal University, Anhui Wuhu 241003*)

Abstract: Using the functional generalized variational iteration method, a class of nonlinear disturbed dynamic system was considered. First introduce solitary solution to a corresponding typical system. And then a set of functional generalized variation constructed, and Lagrange multiplier functions were solved. Finally, the generalized variational iteration was received. Thus, the asymptotic travelling wave solution to the original nonlinear disturbed generalized dynamic system was obtained

Key words: Dynamic system; Nonlinear; Solitary wave.

MR(2010) Subject Classification: 35B25