Mathematica Acta Scientia 数学物理学报
2021,41A(6):1606–1615 http://actams.wipm.ac.cn

单位球 Hardy 空间上加权复合算子的交换子

[1] 徐宁 [2] 周泽华* [1] 丁颖
([1] 江苏海洋大学理学院 江苏连云港 222005; [2] 天津大学数学学院 天津 300072)

摘要：该文研究了单位球 Hardy 空间上非自同构线性分式加权复合算子的交换子. 首先给出加权复合算子的交换子公式. 然后根据线性分式映射的三种类型刻画交换子的紧性. 最后得到当线性分式映射为抛物型时，交换子是紧的.

关键词：Hardy 空间；加权复合算子；交换子.
MR(2010) 主题分类：47B38; 47B47 **中图分类号**：O177.2 **文献标识码**：A
文章编号：1003-3998(2021)06-1606-10

1 引言

记 $\mathbb{B}_n$ 为 $\mathbb{C}^n$ 上单位开球， φ 为 $\mathbb{B}_n$ 上解析自映射. 记 $H(\mathbb{B}_n)$ 为 $\mathbb{B}_n$ 上所有解析函数全体， H^∞ 为 $\mathbb{B}_n$ 上所有有界解析函数全体. 设 $u\in H^\infty$, $f\in H(\mathbb{B}_n)$, 定义加权复合算子 $W_{u,\varphi}f=u\cdot(f\circ\varphi)$. 特别地，当 $u=1$ 时，即为复合算子 C_φ. 注意到， $W_{u,\varphi}=M_uC_\varphi$, 其中， M_u 为乘积算子. 记 $\mathcal{B}(X)$ 为可分复 Hilbert 空间上所有有界线性算子全体. 当 $S,T\in\mathcal{B}(X)$, ST 与 TS 非零且都不是紧时，若 $[S,T]=ST-TS$ 紧，则称交换子 $[S,T]$ 是非平凡紧. 若 $[T^*,T]=0$, 则称 $T\in\mathcal{B}(X)$ 正规. 若 $[T^*,T]$ 紧，则称 $T\in\mathcal{B}(X)$ 本性正规.

许多学者都对一维以及高维线性分式复合算子的交换子感兴趣. Clifford 等 [1] 研究了当 φ 与 ψ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的线性分式映射时，Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$ 上复合算子交换子 $[C_\psi^*,C_\varphi]$ 非平凡紧性. Jung 等 [2] 研究了当 φ 与 ψ 是单位圆盘非自同构线性分式映射时，Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$ 上加权复合算子交换子 $[W_{v,\psi}^*,W_{u,\varphi}]$ 紧性. Lacruz 等 [3] 研究了单位圆盘上线性分式映射复合算子二次交换子性质. 对于多变量情形，江良英等 [4] 研究了线性分式复合算子的本性正规性，然后第一作者在文献 [5] 中研究了单位球 Hardy 空间 $H(\mathbb{B}_n)$ 上自同构复合算子交换子 $[C_\psi^*,C_\varphi]$ 紧性.

本文将研究 φ 与 ψ 是单位球 $\mathbb{B}_n$ 的非自同构线性分式映射时，Hardy 空间 $H(\mathbb{B}_n)$ 上加权复合算子交换子 $[W_{v,\psi}^*,W_{u,\varphi}]$ 紧性. 第 2 节给出主要定理的一些准备引理. 第 3 节给出线性分式加权复合算子交换子 $[W_{v,\psi}^*,W_{u,\varphi}]$ 的计算公式，然后讨论当 $\|\varphi\|_\infty=1$ 时 $[W_{v,\psi}^*,W_{u,\varphi}]$ 的紧性. 本文重点讨论当 φ 在单位球边界 $\partial\mathbb{B}_n$ 上有一个不动点 e_1 情形. 显然，通过酉变换，不妨设 $e_1=(1,0,\cdots,0)$.

收稿日期: 2020-06-04; 修订日期: 2021-06-28
E-mail: gx899200@126.com; xuning@jou.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金 (11771323) 江苏海洋大学博士科研启动金 (KQ17006)
Supported by the NSFC(11771323) and the Doctoral Research Launch Fund of Jiangsu Ocean University(KQ17006)
* 通讯作者

2 预备知识

记 σ 为 $\partial\mathbb{B}_n$ 上正规 Lebesgue 测度. 当 $n \geq 1$, 定义 Hardy 空间为

$$H^2(\mathbb{B}_n) = \left\{ f \in H(\mathbb{B}_n) : \|f\|^2 = \sup_{0<r<1} \int_{\partial\mathbb{B}_n} |f(r\zeta)|^2 \mathrm{d}\sigma(\zeta) < \infty \right\}.$$

设 u 为 $\partial\mathbb{B}_n$ 上有界可测复值函数， $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上 Toeplitz 算子定义为 $T_u(f) = P(uf)$, 其中 P 是 $L^2(\partial\mathbb{B}_n)$ 到 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 的正交投影. 如果 u 是解析的，则 T_u 即 M_u. Cowen 等 [6] 定义单位球 $\mathbb{B}_n$ 上线性分式映射如下：

定理 2.1 设

$$\varphi(z) = \frac{Az + B}{\langle z, C\rangle + D} \tag{2.1}$$

是 $\mathbb{B}_n$ 的线性分式映射，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中欧式内积， A 表示 $n \times n$ 矩阵， B 和 C 表示 $n \times 1$ 列向量， D 是一个复数. C_φ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上由 φ 诱导的复合算子. 则 C_φ 的伴随算子 C_φ^* 为

$$C_\varphi^* = T_g C_{\sigma_\varphi} T_h^*, \tag{2.2}$$

其中

$$\sigma_\varphi(z) = \frac{A^* z - C}{\overline{\langle z, -B\rangle + \overline{D}}} \tag{2.3}$$

是 φ 的 Kreĭn 伴随，$g(z) = (\langle z, -B\rangle + \overline{D})^{-n}$, $h(z) = (\langle z, C\rangle + D)^n$, T_g, T_h 分别是解析 Toeplitz 算子.

在下文中，记 $LFM(\mathbb{B}_n)$ 与 $Aut(\mathbb{B}_n)$ 分别表示 $\mathbb{B}_n$ 上所有线性分式映射全体与自同构全体. 如果 φ 将 $\mathbb{B}_n$ 映到自身，则 $|D| > |C|$, 因此有 $D \neq 0$, 且 φ 在 $\mathbb{B}_n$ 的某个邻域内解析. 我们使用下面定义的矩阵验证两个复合算子是否为 Kreĭn 伴随算子. 设

$$m_\varphi = \begin{pmatrix} A & B \\ C^* & D \end{pmatrix}, \qquad m_{\sigma_\varphi} = \begin{pmatrix} A^* & -C \\ -B^* & \overline{D} \end{pmatrix}$$

分别为线性分式映射 φ 及其伴随映射 σ_φ 的矩阵表示，则矩阵 m_φ 与 m_{σ_φ} 是 Kreĭn 伴随矩阵，即 $m_\varphi = m_{\sigma_\varphi}^\times = J m_{\sigma_\varphi}^* J$, 其中

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$m_{\sigma_\varphi}^*$ 是 Hilbert 空间上 m_φ 伴随. 要验证两个复合算子 Kreĭn 伴随，只要证明 m_φ 与 m_{σ_φ} 是 Kreĭn 伴随矩阵即可.

下面回顾不动点及其分类.

定理 2.2[7] 设 $\varphi \in LFT(\mathbb{B}_n)$ 在 $\mathbb{B}_n$ 内部无不动点，则存在唯一一个不动点 $\zeta \in \partial\mathbb{B}_n$ 使得 $\varphi(\zeta) = \zeta$ 以及 $\langle \mathrm{d}\varphi_\zeta(\zeta), \zeta\rangle = \lambda$ 其中 $0 < \lambda \leq 1$.

上述定理中的唯一点 $\zeta \in \partial\mathbb{B}_n$ 称为 φ 的 Denjoy-Wolff 点， λ 称为 φ 的边界扩张系数. 根据定理 2.2, $\mathbb{B}_n$ 的线性分式映射半群分为三类：如果 φ 在 $\mathbb{B}_n$ 内部有不动点，则称 φ 是椭圆型. 如果 φ 在 $\mathbb{B}_n$ 内部无不动点且 λ 为 φ 的 Denjoy-Wolff 点的边界扩张系数，当 $\lambda < 1$ 时，称 φ 是双曲型，当 $\lambda = 1$ 时，称 φ 是抛物型.

江良英等 [4] 研究了 Hardy 空间上复合算子本性正规性时改善文献 [8] 中其他条件，获得式 (2.4). 本文将在式 (2.4) 前提下研究加权复合算子交换子.

引理 2.1[4] 设 φ 是 $\mathbb{B}_n$ 的线性分式映射且满足 $\varphi(e_1)=e_1$. 对某个 $c>0$ 及 e_1 附近一点 $\zeta\in\partial\mathbb{B}_n$, φ 满足

$$1-|\varphi(\zeta)|^2\geq c|e_1-\varphi(\zeta)|^2, \tag{2.4}$$

则对每一个复指标 α, 算子 $[T^*_{z^\alpha},C_\varphi]$ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 的紧算子.

为了方便，下面列出主要定理证明过程中用到的一些引理.

引理 2.2[8] 设 φ 是 $\mathbb{B}_n$ 的线性分式映射且 $\varphi(e_1)=e_1$. 对于 $\zeta\in\partial\mathbb{B}_n$, $|\varphi(\zeta)|=1$ 当且仅当 $\zeta=e_1$. 若 $W(z)$ 在 $\overline{\mathbb{B}_n}$ 上连续且 $W(e_1)=0$, 则算子 T_WC_φ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 的紧算子.

引理 2.3[8] 设 φ 是 $\mathbb{B}_n(n>1)$ 的线性分式映射， σ 是 φ 的伴随映射，由式 (2.1) 给出. 若 $\zeta,\eta\in\partial\mathbb{B}_n$ 且 $\varphi(\zeta)=\eta$, 则 $\sigma(\eta)=\zeta$.

引理 2.4[8] 设 φ 是 $\mathbb{B}_n$ 的线性分式映射且有一个边界不动点. $[C_\sigma,C_\varphi]$ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 的紧算子当且仅当 $[C_\sigma,C_\varphi]=0$, 即 $\varphi\circ\sigma=\sigma\circ\varphi$.

下面用符号 ψ_ζ 表示 ψ 沿 ζ 方向坐标，即 $\psi_\zeta(z)=\langle\psi(z),\zeta\rangle$. 定义 $\mathcal{D}_\eta\psi_\zeta(z)=\langle\psi'(z)\eta,\zeta\rangle$ 为 ψ_ζ 沿 η 方向导数，记为 $\mathcal{D}_\eta\psi_\zeta$. 特别地，当 $\zeta=\eta=e_1$, 记为 $\mathcal{D}_1\psi_1(z)$. 我们给出如下引理：

引理 2.5 设 $\varphi\in LFM(\mathbb{B}_n)\backslash Aut(\mathbb{B}_n)$ 满足 $\varphi(e_1)=e_1$, $e_1\in\partial\mathbb{B}_n$. 设 φ 满足式 (2.1), σ_φ 满足式 (2.4). 记

$$s=(\mathcal{D}_1\varphi_1(e_1))^{-n}=\Big(\frac{c_1+\overline{D}}{-\overline{b_1}+\overline{D}}\Big)^n,$$

其中 b_1,c_1 分别是列向量 B 和 C 的首项， C_φ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上复合算子. 则存在一个紧算子 $K\in H^2(\mathbb{B}_n)$ 使得 $C^*_\varphi=sC_{\sigma_\varphi}+K$, 其中 σ_φ 是 φ 的 Kreĭn 伴随.

证 设 σ_φ 如定理 2.1 中是 φ 伴随，则 $\sigma_\varphi(e_1)=e_1$. 由文献 [9], 对于 $\overline{\langle z,C\rangle}\in C(\overline{\mathbb{B}_n})$, 任意非负整数 j 以及紧算子 K, 有 $T_{(\overline{\langle z,C\rangle})^j}=(T_{\overline{\langle z,C\rangle}})^j+K$. 从而有

$$\begin{aligned}T_{\overline{h}}&=T_{(\overline{\langle z,C\rangle}+\overline{D})^n}=T_{C_n^0\overline{D}^n+C_n^1\overline{D}^{n-1}\overline{\langle z,C\rangle}+\cdots+C_n^n(\overline{\langle z,C\rangle})^n}\\&=T_{C_n^0\overline{D}^n}+T_{C_n^1\overline{D}^{n-1}\overline{\langle z,C\rangle}}+\cdots+T_{C_n^n(\overline{\langle z,C\rangle})^n}\\&=C_n^0(T_{\overline{D}})^n+C_n^1(T_{\overline{D}})^{n-1}T_{\overline{\langle z,C\rangle}}+\cdots+C_n^n(T_{\overline{\langle z,C\rangle}})^n+K\\&=(T_{\overline{\langle z,C\rangle}}+T_{\overline{D}})^n+K.\end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned}&[C_{\sigma_\varphi},T^*_h]=C_{\sigma_\varphi}T_{\overline{h}}-T_{\overline{h}}C_{\sigma_\varphi}\\&=C_{\sigma_\varphi}((T_{\overline{\langle z,C\rangle}}+T_{\overline{D}})^n+K)-((T_{\overline{\langle z,C\rangle}}+T_{\overline{D}})^n+K)C_{\sigma_\varphi}\\&=C_{\sigma_\varphi}\Big(C_n^0\overline{D}^n+C_n^1\overline{D}^{n-1}\sum_{j=1}^nC_jT^*_{z_j}+\cdots+C_n^n(\sum_{j=1}^nC_jT^*_{z_j})^n\Big)\\&\quad-\Big(C_n^0\overline{D}^n+C_n^1\overline{D}^{n-1}\sum_{j=1}^nC_jT^*_{z_j}+\cdots+C_n^n(\sum_{j=1}^nC_jT^*_{z_j})^n\Big)C_{\sigma_\varphi}+[C_{\sigma_\varphi},K]\\&=C_n^1\overline{D}^{n-1}I_1+C_n^2\overline{D}^{n-2}I_2+\cdots+C_n^nI_n+[C_{\sigma_\varphi},K],\end{aligned}$$

其中 C_n^j $(j=1\cdots n)$ 是二项式展开系数， C_j $(j=1\cdots n)$ 是向量 C 的分向量,

$$I_i=C_{\sigma_\varphi}\Big(\sum_{j=1}^nC_jT^*_{z_j}\Big)^i-\Big(\sum_{j=1}^nC_jT^*_{z_j}\Big)^iC_{\sigma_\varphi}\ (i=1\cdots n).$$

由引理 2.1, 可知 $[C_{\sigma_\varphi}, T_{z_j}^*]$ 是紧算子. 由 $[C_{\sigma_\varphi}, K]$ 的紧性，可得 $[C_{\sigma_\varphi}, T_h^*]$ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上紧算子. 因此由 $T_gT_h^* = T_{g\overline{h}} + K$ 可得

$$C_\varphi^* = T_gC_{\sigma_\varphi}T_h^* = T_gT_h^*C_{\sigma_\varphi} + K = (T_{g\overline{h}} + K)C_{\sigma_\varphi} + K = T_{g\overline{h}}C_{\sigma_\varphi} + K.$$

由引理 2.2 以及 $W = \overline{h}g - \overline{h(e_1)}g(e_1)$ 可知

$$T_{\overline{h}g}C_{\sigma_\varphi} - \overline{h(e_1)}g(e_1)C_{\sigma_\varphi} = T_{\overline{h}g - \overline{h(e_1)}g(e_1)}C_{\sigma_\varphi}$$

是紧的. 故

$$C_\varphi^* = T_gC_{\sigma_\varphi}T_h^* = \overline{h(e_1)}g(e_1)C_{\sigma_\varphi} + K = sC_{\sigma_\varphi} + K.$$

引理 2.5 证毕. ∎

设 $\mathbb{C}^n$ 中域 Ω 、 Ω', φ 、 Φ 分别是 Ω 、 Ω' 上解析映射. 如果存在一个双全纯映射 $\sigma: \Omega \to \Omega'$ 使得 $\Phi = \sigma^{-1} \circ \varphi \circ \sigma$, 则称 φ 与 Φ 共轭. 我们都知道通过广义 Cayley 变换 σ_C, 单位球 $\mathbb{B}_n$ 双全纯等价于 Siegel 半平面 $H_n := \{(w_1, \cdots, w_n) = (w_1, w') \in \mathbb{C}^n,\ \mathrm{Re}w_1 > |w'|^2\}$, 其中 σ_C 定义为

$$\sigma_C(z) = \Big(\frac{1+z_1}{1-z_1},\ \frac{z'}{1-z_1}\Big), \quad z = (z_1, z') \in \mathbb{B}_n.$$

注意到 σ_C $(\sigma_C(e_1) = \infty)$ 是从 $\overline{\mathbb{B}_n}$ 延拓到 $H_n \bigcup \partial H_n \bigcup \{\infty\}$ 的双连续映射， $\overline{H_n}$ 的一点紧致化.

设 $\varphi \in LFM(\mathbb{B}_n)$ 有唯一一个边界不动点 e_1 且边界扩张系数 $\lambda \le 1$. 由文献 [7, 定理 3.2] 知 φ 是具有 Denjoy-Wolff 点 e_1 的非椭圆型. 则由文献 [10, 引理 4.1] 知， φ 与

$$\Phi(w_1, w') = \frac{1}{\lambda}(w_1 + \langle w', b\rangle + c,\ Aw' + d), \qquad (w_1, w') \in H_n \tag{2.5}$$

共轭，其中 $c \in \mathbb{C}, b, d \in \mathbb{C}^{n-1}, \lambda\mathrm{Re}c \ge |d|^2$, $A \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ $\lambda I - A^*A$ 是 Hermitian 半正定矩阵. 应用这种形式，我们得到 $\mathbb{B}_2$ 的如下结果.

引理 2.6 设 $\varphi, \psi \in LFM(\mathbb{B}_2)\backslash Aut(\mathbb{B}_2)$ 是抛物型, 具有相同的边界固定点 e_1. 假设 φ, ψ 分别与 H_2 的解析自映射 Φ, Ψ 共轭， Φ, Ψ 形式为

$$\Phi(w_1, w_2) = (w_1 + b_1w_2 + c_1,\ a_1w_2 + d_1),$$
$$\Psi(w_1, w_2) = (w_1 + b_2w_2 + c_2,\ a_2w_2 + d_2),$$

其中 $a_j, b_j, c_j, d_j \in \mathbb{C}$ 满足

$$|a_2| < 1,\ \mathrm{Re}c_2 > \frac{|b_2|^2}{4},\ \mathrm{Re}(\overline{c_1} - 2\overline{d_1}d_2 + c_2) > |\overline{a_1}d_2 - \frac{\overline{b_1}}{2}|^2. \tag{2.6}$$

则 σ_ψ 与 $\sigma_\varphi \circ \psi$ 满足式 (2.4).

证 直接计算可得

$$\varphi(z) = \sigma_C^{-1} \circ \Phi \circ \sigma_C(z) = \frac{A_1z + B_1}{\langle z, C_1\rangle + D_1}, \quad \psi(z) = \sigma_C^{-1} \circ \Psi \circ \sigma_C(z) = \frac{A_2z + B_2}{\langle z, C_2\rangle + D_2},$$

其中

$$A_j = \begin{pmatrix} 2-c_j & b_j \\ -2d_j & 2a_j \end{pmatrix}, \quad B_j = \begin{pmatrix} c_j \\ 2d_j \end{pmatrix}, \quad C_j = \begin{pmatrix} -\overline{c_j} \\ \overline{b_j} \end{pmatrix}, \quad D_j = c_j + 2.$$

于是 φ,ψ 的伴随映射 $\sigma_\varphi,\sigma_\psi$ 分别为

$$\sigma_\varphi(z)=\frac{A_1^*z-C_1}{\langle z,-B_1\rangle+\overline{D_1}}\quad \sigma_\psi(z)=\frac{A_2^*z-C_2}{\langle z,-B_2\rangle+\overline{D_2}},$$

我们可以得到分别与 $\sigma_\varphi,\sigma_\psi$ 共轭的 H_2 的解析自映射 Δ,Γ, 形式如下

$$\Delta(w_1,w_2)=\sigma_C\circ\sigma_\varphi\circ\sigma_C^{-1}(w_1,w_2)=(w_1-2\overline{d_1}w_2+\overline{c_1},\ \overline{a_1}w_2-\frac{\overline{b_1}}{2}),$$
$$\Gamma(w_1,w_2)=\sigma_C\circ\sigma_\psi\circ\sigma_C^{-1}(w_1,w_2)=(w_1-2\overline{d_2}w_2+\overline{c_2},\ \overline{a_2}w_2-\frac{\overline{b_2}}{2}).$$

由文献 [4] 中定理 4.3, 若 $z=(z_1,z_2)=\sigma_C^{-1}(w)\in\partial\mathbb{B}_2$, 则 $w=(w_1,w_2)=\sigma_C(z)\in\partial H_2$ 且满足 $\mathrm{Re}w_1=|w_2|^2$, 于是可得

$$\begin{aligned}
&1-|\sigma_\psi(z)|^2-k|e_1-\sigma_\psi(z)|^2=\frac{4[\mathrm{Re}(w_1-2\overline{d_2}w_2+\overline{c_2})-(1+k)|\overline{a_2}w_2-\frac{\overline{b_2}}{2}|^2-k]}{|w_1-2\overline{d_2}w_2+\overline{c_2}+1|^2}\\
=&\frac{4\{(1-|a_2|^2-k|a_2|^2)|w_2|^2+\mathrm{Re}[(\overline{a_2}b_2-2\overline{d_2}+k\overline{a_2}b_2)w_2]+\mathrm{Re}\overline{c_2}-\frac{|b_2|^2}{4}-k(1+\frac{|b_2|^2}{4})\}}{|w_1-2\overline{d_2}w_2+\overline{c_2}+1|^2}\\
=&\frac{4\{(1-|a_2|^2-k|a_2|^2)|z_2|^2+\mathrm{Re}[(\overline{a_2}b_2-2\overline{d_2}+k\overline{a_2}b_2)z_2(1-\overline{z_1})]\}}{|1+z_1-2\overline{d_2}z_2+(\overline{c_2}+1)(1-z_1)|^2}\\
&+\frac{4(\mathrm{Re}\overline{c_2}-\frac{|b_2|^2}{4}-k(1+\frac{|b_2|^2}{4}))|1-z_1|^2}{|1+z_1-2\overline{d_2}z_2+(\overline{c_2}+1)(1-z_1)|^2}.
\end{aligned}$$

与文献 [4] 中命题 3.1 和定理 4.3 的证明类似，选取

$$k<\min\Big\{\frac{1-|a_2|^2}{|a_2|^2},\frac{\mathrm{Re}\overline{c_2}-\frac{|b_2|^2}{4}}{1+\frac{|b_2|^2}{4}}\Big\},\tag{2.7}$$

则 $1-|\sigma_\psi(z)|^2\geq k|e_1-\sigma_\psi(z)|^2$ 在 $e_1\in\partial\mathbb{B}_2$ 的某个邻域内成立.

通过具体计算，我们可以得到与 $\sigma_\varphi\circ\psi$ 共轭的 H_2 的解析自映射 Λ, 形式如下

$$\begin{aligned}
\Lambda(w_1,w_2)&=\sigma_C\circ\sigma_\varphi\circ\psi\circ\sigma_C^{-1}(w_1,w_2)=\sigma_C\circ\sigma_\varphi\circ\sigma_C^{-1}\circ\sigma_C\circ\psi\circ\sigma_C^{-1}(w_1,w_2)\\
&=\Delta\circ\Psi(w_1,w_2)\\
&=(w_1+(b_2-2\overline{d_1}a_2)w_2+c_2-2\overline{d_1}d_2+\overline{c_1},\ \ \overline{a_1}a_2w_2+\overline{a_1}d_2-\frac{\overline{b_1}}{2}).
\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
&1-|\sigma_\varphi\circ\psi(z)|^2-k|e_1-\sigma_\varphi\circ\psi(z)|^2\\
=&\frac{4[\mathrm{Re}(w_1+(b_2-2\overline{d_1}a_2)w_2+c_2-2\overline{d_1}d_2+\overline{c_1})-(1+k)\left|\overline{a_1}a_2w_2+\overline{a_1}d_2-\frac{\overline{b_1}}{2}\right|^2-k]}{|w_1+(b_2-2\overline{d_1}a_2)w_2+c_2-2\overline{d_1}d_2+\overline{c_1}+1|^2}\\
=&\frac{4\{(1-|a_1a_2|^2-k|a_1a_2|^2)|w_2|^2+\mathrm{Re}[b_2-2\overline{d_1}a_2-(1+k)(2|a_1|^2a_2\overline{d_2}-\overline{a_1}a_2b_1)]w_2\}}{|w_1+(b_2-2\overline{d_1}a_2)w_2+c_2-2\overline{d_1}d_2+\overline{c_1}+1|^2}\\
&+\frac{4\{\mathrm{Re}(\overline{c_1}-2\overline{d_1}d_2+c_2)-|\overline{a_1}d_2-\frac{\overline{b_1}}{2}|^2-k(1+|\overline{a_1}d_2-\frac{\overline{b_1}}{2}|^2)\}}{|w_1+(b_2-2\overline{d_1}a_2)w_2+c_2-2\overline{d_1}d_2+\overline{c_1}+1|^2}.
\end{aligned}$$

与文献 [4] 中命题 3.1 和定理 4.3 的证明类似，选取

$$k < \min\left\{\frac{1-|a_1a_2|^2}{|a_1a_2|^2}, \frac{\mathrm{Re}(\overline{c_1}-2\overline{d_1}d_2+c_2)-|\overline{a_1}d_2-\frac{\overline{b_1}}{2}|^2}{1+|\overline{a_1}d_2-\frac{\overline{b_1}}{2}|^2}\right\}, \tag{2.8}$$

则 $1-|\sigma_\varphi\circ\psi(z)|^2 \geq k|e_1-\sigma_\varphi\circ\psi(z)|^2$ 在 $e_1\in\partial\mathbb{B}_2$ 的某个邻域内成立.

结合式 (2.5), (2.7) 与 (2.8), 可得

$$|a_2|<1,\ \mathrm{Re}c_2 > \frac{|b_2|^2}{4},\ \mathrm{Re}(\overline{c_1}-2\overline{d_1}d_2+c_2) > |\overline{a_1}d_2-\frac{\overline{b_1}}{2}|^2.$$

引理 2.6 证毕.

引理 2.7 设 $\varphi,\psi\in LFM(\mathbb{B}_2)\backslash Aut(\mathbb{B}_2)$ 是双曲型, 具有相同的边界固定点 e_1. 假设 φ,ψ 分别与 H_2 的解析自映射 Φ,Ψ 共轭， Φ,Ψ 具有如下形式

$$\Phi(w_1,w_2)=\frac{1}{\lambda_1}(w_1+b_1w_2+c_1,\ a_1w_2+d_1),$$
$$\Psi(w_1,w_2)=\frac{1}{\lambda_2}(w_1+b_2w_2+c_2,\ a_2w_2+d_2),$$

其中 $a_j,b_j,c_j,d_j\in\mathbb{C}$ 满足

$$|a_2|^2<\lambda_2,\ \lambda_2\mathrm{Re}c_2 > \frac{|b_2|^2}{4},\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathrm{Re}(\overline{c_1}-2\overline{d_1}d_2+c_2) > |\frac{\overline{a_1}d_2}{\lambda_2}-\frac{\overline{b_1}}{2}|^2, \tag{2.9}$$

则 σ_ψ 与 $\sigma_\varphi\circ\psi$ 满足式 (2.4).

证 与引理 2.6 同理，选取

$$k < \min\left\{\frac{\lambda_2-|a_2|^2}{|a_2|^2}, \frac{\lambda_2\mathrm{Re}\overline{c_2}-\frac{|b_2|^2}{4}}{1+\frac{|b_2|^2}{4}}\right\}, \tag{2.10}$$

则 $1-|\sigma_\psi(z)|^2 \geq k|e_1-\sigma_\psi(z)|^2$ 在 $e_1\in\partial\mathbb{B}_2$ 的某个邻域内成立. 选取

$$k < \min\left\{\frac{\lambda_1\lambda_2-\lambda_2|a_1a_2|^2}{|a_1a_2|^2}, \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathrm{Re}(\overline{c_1}-2\overline{d_1}d_2+c_2)-|\frac{\overline{a_1}d_2}{\lambda_2}-\frac{\overline{b_1}}{2}|^2}{1+|\frac{\overline{a_1}d_2}{\lambda_2}-\frac{\overline{b_1}}{2}|^2}\right\}, \tag{2.11}$$

则 $1-|\sigma_\varphi\circ\psi(z)|^2 \geq k|e_1-\sigma_\varphi\circ\psi(z)|^2$ 在 $e_1\in\partial\mathbb{B}_2$ 的某个邻域内成立. 结合式 (2.5), (2.10) 以及 (2.11), 可得

$$|a_2|^2<\lambda_2,\ \lambda_2\mathrm{Re}c_2 > \frac{|b_2|^2}{4},\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathrm{Re}(\overline{c_1}-2\overline{d_1}d_2+c_2) > |\frac{\overline{a_1}d_2}{\lambda_2}-\frac{\overline{b_1}}{2}|^2.$$

引理 2.7 证毕.

我们以定理 2.3 结束本节，该定理可在文献 [11] 中找到. 后面我们将使用定理 2.3 来证明定理 3.2.

定理 2.3 假设 φ 与 ψ 是 $\mathbb{B}_n$ 的线性分数映射，且 $C_\varphi-C_\psi$ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 的紧算子，则 $\varphi=\psi$ 或者 $\|\varphi\|_\infty<1$ 且 $\|\psi\|_\infty<1$, 因此 C_φ 和 C_ψ 都是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 的紧算子.

3 主要定理

本节给出加权复合算子的交换子方程, 然后研究线性分式映射分别为抛物型和双曲型时交换子的紧性.

定理 3.1 设 $\varphi,\psi\in LFM(\mathbb{B}_n)\backslash Aut(\mathbb{B}_n)$, 且满足 $\varphi(e_1)=\psi(e_1)=e_1$, $e_1\in\partial\mathbb{B}_n$. 设 $\sigma_\psi,\sigma_\varphi\circ\psi$ 满足式 (2.4). $W_{u,\varphi}$ 与 $W_{v,\psi}$ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上分别由 φ 与 ψ 诱导的加权复合算子, 若 $u,v\in H^\infty(\mathbb{B}_n)$ 在 $\partial\mathbb{B}_n$ 上连续, 则

$$[W_{v,\psi}^*,W_{u,\varphi}]\equiv(\mathcal{D}_1\psi_1(e_1))^{-n}u(e_1)\overline{v(e_1)}[C_{\sigma_\psi},C_\varphi](\mathrm{mod}\ K),$$

其中 K 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上紧算子.

证 由引理 2.5 知 $C_\psi^*=(\mathcal{D}_1\psi_1(e_1))^{-n}C_{\sigma_\psi}+K$. 因此

$$\begin{aligned}[W_{v,\psi}^*,W_{u,\varphi}]&=C_\psi^*T_v^*T_uC_\varphi-T_uC_\varphi C_\psi^*T_v^*\\&=(\mathcal{D}_1\psi_1(e_1))^{-n}(C_{\sigma_\psi}T_v^*T_uC_\varphi-T_uC_\varphi C_{\sigma_\psi}T_v^*)+K.\end{aligned}$$

由引理 2.2 知, $T_v^*C_\varphi-\overline{v(e_1)}C_\varphi$ 和 $T_uC_\varphi-u(e_1)C_\varphi$ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上紧算子, 因此

$$\begin{aligned}[W_{v,\psi}^*,W_{u,\varphi}]&=(\mathcal{D}_1\psi_1(e_1))^{-n}u(e_1)(\overline{v(e_1)}C_{\sigma_\psi}C_\varphi-C_\varphi C_{\sigma_\psi}T_v^*)+K\\&=(\mathcal{D}_1\psi_1(e_1))^{-n}u(e_1)(\overline{v(e_1)}C_{\varphi\circ\sigma_\psi}-C_{\sigma_\psi\circ\varphi}T_v^*)+K.\end{aligned}$$

通过具体计算得

$$\begin{aligned}m_{\sigma_\psi\circ\varphi}=m_{\sigma_\psi}m_\varphi&=\begin{pmatrix}A_2^*&-C_2\\-B_2^*&\overline{D_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&B_1\\C_1^*&D_1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A_2^*A_1-C_2C_1^*&A_2^*B_1-C_2D_1\\-B_2^*A_1+\overline{D_2}C_1^*&-B_2^*B_1+D_1\overline{D_2}\end{pmatrix},\\m_{\sigma_\varphi\circ\psi}&=\begin{pmatrix}A_1^*A_2-C_1C_2^*&A_1^*B_2-C_1D_2\\-B_1^*A_2+\overline{D_1}C_2^*&-B_1^*B_2+\overline{D_1}D_2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

从而有 $m_{\sigma_\psi\circ\varphi}=Jm_{\sigma_\varphi\circ\psi}^*J$, 即 $m_{\sigma_\psi\circ\varphi}$ 与 $m_{\sigma_\varphi\circ\psi}$ 是 Kreĭn 伴随矩阵. 因此

$$C_{\sigma_\psi\circ\varphi}^*=(\mathcal{D}_1(\sigma_\psi\circ\varphi)_1(e_1))^{-n}C_{\sigma_\varphi\circ\psi}+K.$$

再由引理 2.2, 可知 $T_vC_{\sigma_\varphi\circ\psi}-v(e_1)C_{\sigma_\varphi\circ\psi}$ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上紧算子. 因此

$$\begin{aligned}C_{\sigma_\psi\circ\varphi}T_v^*=(T_vC_{\sigma_\psi\circ\varphi}^*)^*&=(\mathcal{D}_1(\sigma_\psi\circ\varphi)_1(e_1)^{-n}C_{\sigma_\varphi\circ\psi}^*T_v^*+K\\&=\overline{v(e_1)}(\mathcal{D}_1(\sigma_\psi\circ\varphi)_1(e_1)^{-n}C_{\sigma_\varphi\circ\psi}^*+K\\&=\overline{v(e_1)}C_{\sigma_\psi\circ\varphi}+K.\end{aligned}$$

从而得到

$$[W_{v,\psi}^*,W_{u,\varphi}]\equiv(\mathcal{D}_1\psi_1(e_1))^{-n}u(e_1)\overline{v(e_1)}[C_{\sigma_\psi},C_\varphi](\mathrm{mod}\ K).$$

定理 3.1 得证. ∎

从上面的定理 3.1, 我们得到当 $\varphi\in LFM(\mathbb{B}_n)\backslash Aut(\mathbb{B}_n)$ 时加权复合算子自交换子公式.

推论 3.1 (i) 设 $\varphi \in LFM(\mathbb{B}_n)\backslash Aut(\mathbb{B}_n)$, 且满足 $\varphi(e_1)=e_1$, $e_1 \in \partial\mathbb{B}_n$. 设 $\sigma_\varphi, \sigma_\varphi \circ \varphi$ 满足式 (2.4). $W_{u,\varphi}$ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上由 φ 诱导加权复合算子. 若 $H^\infty(\mathbb{B}_n) \ni u$ 在 $\partial\mathbb{B}_n$ 上连续，则

$$[W_{u,\varphi}^*, W_{u,\varphi}] \equiv (\mathcal{D}_1\varphi_1(e_1))^{-n}|u(e_1)|^2[C_{\sigma_\varphi}, C_\varphi] (\bmod K).$$

(ii) 设 $\varphi, \psi \in LFM(\mathbb{B}_n)\backslash Aut(\mathbb{B}_n)$, 且满足 $\varphi(e_1)=\psi(e_1)=e_1$, $e_1 \in \partial\mathbb{B}_n$. 设 $\sigma_\psi, \sigma_\varphi \circ \psi$ 满足式 (2.4). C_φ 与 C_ψ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上分别由 φ 与 ψ 诱导的复合算子. 则

$$[C_\psi^*, C_\varphi] \equiv (\mathcal{D}_1\psi_1(e_1))^{-n}[C_{\sigma_\psi}, C_\varphi] (\bmod K).$$

证 (i) 在定理 3.1 中取 $u=v, \varphi=\psi$ 即可.

(ii) 在定理 3.1 中取 $u=v=1$ 即可. ▌

下面我们刻画 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上 $[W_{v,\psi}^*, W_{u,\varphi}]$ 紧性的充要条件.

定理 3.2 设 $\varphi, \psi \in LFM(\mathbb{B}_n)\backslash Aut(\mathbb{B}_n)$, 且满足 $\varphi(e_1)=\psi(e_1)=e_1$, $e_1 \in \partial\mathbb{B}_n$. 设 $\sigma_\psi, \sigma_\varphi \circ \psi$ 满足式 (2.4). $W_{u,\varphi}$ 与 $W_{v,\psi}$ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上分别由 φ 与 ψ 诱导的加权复合算子. 若 $H^\infty(\mathbb{B}_n) \ni u, v$ 在 $\partial\mathbb{B}_n$ 上连续，则 $[W_{v,\psi}^*, W_{u,\varphi}]$ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上紧算子的充要条件是下面两个条件中至少一个成立.

(i) $u(e_1)v(e_1)=0$,

(ii) $\varphi \circ \sigma_\psi = \sigma_\psi \circ \varphi$.

证 由定理 3.1 知，$[W_{v,\psi}^*, W_{u,\varphi}]$ 紧当且仅当 $(\mathcal{D}_1\psi_1(e_1))^{-n}u(e_1)\overline{v(e_1)}[C_{\sigma_\psi}, C_\varphi]$ 是紧的.

首先, 假设 $(\mathcal{D}_1\psi_1(e_1))^{-n}u(e_1)\overline{v(e_1)}[C_{\sigma_\psi}, C_\varphi]$ 是紧的, 则 $u(e_1)\overline{v(e_1)}=0$ 或者 $[C_{\sigma_\psi}, C_\varphi]$ 是紧的. 于是有 $u(e_1)v(e_1)=0$ 或者 $C_{\varphi\circ\sigma_\psi}-C_{\sigma_\psi\circ\varphi}$ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上紧算子. 由定理 2.3 知 $\varphi\circ\sigma_\psi = \sigma_\psi\circ\varphi$ 或者 $\|\varphi\circ\sigma_\psi\|_\infty<1$, $\|\sigma_\psi\circ\varphi\|_\infty<1$. 再由定理条件知 $\varphi\circ\sigma_\psi(e_1)=e_1, \sigma_\psi\circ\varphi(e_1)=e_1$, 所以 $\|\varphi\circ\sigma_\psi\|_\infty<1$ 与 $\|\sigma_\psi\circ\varphi\|_\infty<1$ 不成立. 另外，线性分式映射 $\varphi\circ\sigma_\psi$ 与 $\sigma_\psi\circ\varphi$ 的角导数都是有限的. 由文献 [12] 的定理 3.43 知， $C_{\varphi\circ\sigma_\psi}$ 与 $C_{\sigma_\psi\circ\varphi}$ 都不是紧的，从而必要条件得证.

另一方面，如果 (i) 、 (ii) 中至少有一个成立，显然 $(\mathcal{D}_1\psi_1(e_1))^{-n}u(e_1)\overline{v(e_1)}[C_{\sigma_\psi}, C_\varphi]$ 是紧的，从而充分性得证. ▌

推论 3.2 设 $\varphi, \psi \in LFM(\mathbb{B}_n)\backslash Aut(\mathbb{B}_n)$, 且满足 $\varphi(e_1)=\psi(e_1)=e_1$, $e_1 \in \partial\mathbb{B}_n$. 设 $\sigma_\psi, \sigma_\varphi \circ \psi$ 满足式 (2.4). $W_{u,\varphi}$ 与 $W_{v,\psi}$ 是 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上分别由 φ 与 ψ 诱导的加权复合算子. 设 $H^\infty(\mathbb{B}_n) \ni u, v$ 在 $\partial\mathbb{B}_n$ 上连续且满足 $u(e_1)v(e_1)\neq 0$. 若 φ 是抛物型 (双曲型), ψ 是双曲型 (抛物型), 则 $[W_{v,\psi}^*, W_{u,\varphi}]$ 非紧.

证 假设 φ 与 ψ 分别是抛物型与双曲型. 由定理 3.1, 可得

$$[W_{v,\psi}^*, W_{u,\varphi}] \equiv (\mathcal{D}_1\psi_1(e_1))^{-n}u(e_1)\overline{v(e_1)}[C_{\sigma_\psi}, C_\varphi] (\bmod K).$$

因为 ψ 是双曲型，所以 $\mathcal{D}_1(\sigma_\psi)_1(e_1)=\frac{1}{\lambda}>1$, 即 σ_ψ 不是双曲型. 由文献 [7] 中定理 3.2 可知， σ_ψ 有一个孤立不动点 $\alpha \in \mathbb{B}_n$. 若 $\sigma_\psi\circ\varphi=\varphi\circ\sigma_\psi$, 则 $\sigma_\psi\circ\varphi(\alpha)=\varphi\circ\sigma_\psi(\alpha)=\varphi(\alpha)$, 上式说明 $\varphi(\alpha)$ 也是 σ_ψ 的一个不动点. 由于 φ 在 $\mathbb{B}_n$ 内部没有不动点，即 $\varphi(\alpha)\neq\alpha$. 由引理 2.3 可知若 ψ 在 $\partial\mathbb{B}_n$ 上无不动点，所以 σ_ψ 在 $\partial\mathbb{B}_n$ 上也没有不动点. 综上讨论说明 σ_ψ 存在 $\alpha\in\partial\mathbb{B}_n$ 与 $\varphi(\alpha)\in\mathbb{B}_n$ 两个不动点，与 σ_ψ 有一个不动点矛盾. 因此， $\sigma_\psi\circ\varphi\neq\varphi\circ\sigma_\psi$. 通过定理 3.2 知 $[W_{v,\psi}^*, W_{u,\varphi}]$ 非紧. 当 φ 为双曲型， ψ 为抛物型时，同理可证. ▌

注 3.1 由推论 3.2, 我们判断 $[W_{v,\psi}^*, W_{u,\varphi}]$ 的紧性，只要考虑 φ 和 ψ 都是抛物型或都是双曲型即可.

现在利用引理 2.6 和引理 2.7 研究线性分式映射 $\varphi, \psi \in LFM(\mathbb{B}_2)\backslash Aut(\mathbb{B}_2)$ 诱导的加权复合算子交换子 $[W_{v,\psi}^*, W_{u,\varphi}]$ 的紧性.

定理 3.3 设 $\varphi,\psi\in LFM(\mathbb{B}_2)\backslash Aut(\mathbb{B}_2)$ 都是抛物型且具有相同边界不动点 e_1. 设 φ,ψ 分别与 H_2 的解析自映射 Φ,Ψ 共轭, Φ,Ψ 具有如下形式

$$\begin{aligned}\Phi(w_1,w_2)&=(w_1+b_1w_2+c_1,\ a_1w_2+d_1),\\ \Psi(w_1,w_2)&=(w_1+b_2w_2+c_2,\ a_2w_2+d_2),\end{aligned}$$

其中 $a_j,b_j,c_j,d_j\in\mathbb{C}$ 满足式 (2.6). $W_{u,\varphi}$ 与 $W_{v,\psi}$ 是 $H^2(\mathbb{B}_2)$ 上分别由 φ 与 ψ 诱导的加权复合算子. 若 $H^\infty(\mathbb{B}_n)\ni u,v$ 在 $\partial\mathbb{B}_2$ 上连续且满足 $u(e_1)v(e_1)\neq 0$, 则 $[W^*_{v,\psi},W_{u,\varphi}]$ 是紧的当且仅当

$$\begin{cases}b_1(1-\overline{a_2})=2(a_1-1)\overline{d_2},\\ \overline{b_2}(1-a_1)=2(\overline{a_2}-1)d_1.\end{cases}$$

证 由引理 2.6 可知, σ_ψ 与 $\sigma_\varphi\circ\psi$ 都满足式 (2.4). 通过具体计算

$$\begin{aligned}\Phi\circ\Gamma(w_1,w_2)&=(w_1+(b_1\overline{a_2}-2\overline{d_2})w_2+\overline{c_2}+c_1-\frac{b_1\overline{b_2}}{2},\ a_1\overline{a_2}w_2-\frac{a_1\overline{b_2}}{2}+d_1),\\ \Gamma\circ\Phi(w_1,w_2)&=(w_1+(b_1-2\overline{d_2}a_1)w_2+\overline{c_2}+c_1-2d_1\overline{d_2},\ a_1\overline{a_2}w_2-\frac{\overline{b_2}}{2}+d_1\overline{a_2}).\end{aligned}$$

因为 $u(e_1)v(e_1)\neq 0$, 由定理 3.2 以及上式, $[W^*_{v,\psi},W_{u,\varphi}]$ 是紧的当且仅当 $\varphi\circ\sigma_\psi=\sigma_\psi\circ\varphi$ 当且仅当 $\Phi\circ\Gamma=\Gamma\circ\Phi$ 当且仅当

$$\begin{cases}b_1(1-\overline{a_2})=2(a_1-1)\overline{d_2},\\ \overline{b_2}(1-a_1)=2(\overline{a_2}-1)d_1,\\ b_1\overline{b_2}=4d_1\overline{d_2}.\end{cases}$$

上式等价于

$$\begin{cases}b_1(1-\overline{a_2})=2(a_1-1)\overline{d_2},\\ \overline{b_2}(1-a_1)=2(\overline{a_2}-1)d_1.\end{cases}$$

定理 3.3 得证. ▌

定理 3.4 设 $\varphi,\psi\in LFM(\mathbb{B}_2)\backslash Aut(\mathbb{B}_2)$ 都是双曲型, 且具有相同边界不动点 e_1. 设 φ,ψ 分别与 H_2 的解析自映射 Φ,Ψ 共轭, Φ,Ψ 具有如下形式

$$\begin{aligned}\Phi(w_1,w_2)&=\frac{1}{\lambda_1}(w_1+b_1w_2+c_1,\ a_1w_2+d_1),\\ \Psi(w_1,w_2)&=\frac{1}{\lambda_2}(w_1+b_2w_2+c_2,\ a_2w_2+d_2),\end{aligned}$$

其中 λ_1 与 λ_2 分别是 φ 与 ψ 的边界扩张系数. $a_j,b_j,c_j,d_j\in\mathbb{C}$ 满足式 (2.9). $W_{u,\varphi}$ 与 $W_{v,\psi}$ 是 $H^2(\mathbb{B}_2)$ 上分别由 φ 与 ψ 诱导的加权复合算子. 若 $H^\infty(\mathbb{B}_n)\ni u,v$ 在 $\partial\mathbb{B}_2$ 上连续且 $u(e_1)v(e_1)\neq 0$, 则 $[W^*_{v,\psi},W_{u,\varphi}]$ 非紧.

证 由引理 2.7 可知, σ_ψ 与 $\sigma_\varphi\circ\psi$ 满足式 (2.4). 由定理 3.2, 只要证明 $\varphi\circ\sigma_\psi\neq\sigma_\psi\circ\varphi$ 即可.

假设 $\varphi\circ\sigma_\psi=\sigma_\psi\circ\varphi$. 由定理条件知, ψ 只有一个不动点 $e_1\in\partial\mathbb{B}_2$, 所以 ψ 的伴随映射 σ_ψ 也只有一个不动点 e_1. 因为 ψ 是双曲型, 所以它的边界扩张系数 $\lambda_2<1$. 故 σ_ψ 的边界扩张系数 $\frac{1}{\lambda_2}>1$. 由文献 [7] 定理 3.2 知, σ_ψ 有一个孤立不动点 $\alpha\in\mathbb{B}_2$. 如果 $\sigma_\psi\circ\varphi=\varphi\circ\sigma_\psi$,

则 $\sigma_\psi \circ \varphi(\alpha) = \varphi \circ \sigma_\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$. 上式说明 $\varphi(\alpha)$ 是 σ_ψ 一个不动点．然而， φ 在 $\mathbb{B}_2$ 内无不动点，因此 $\varphi(\alpha) \neq \alpha$. 由引理 2.3, 若 ψ 没有其它不动点，则 σ_ψ 也无其它不动点．通过上述讨论 σ_ψ 有三个不动点 $e_1 \in \partial\mathbb{B}_2$, $\alpha \in \mathbb{B}_2$ 以及 $\varphi(\alpha) \in \mathbb{B}_2$, 这与 σ_ψ 只有一个不动点 $\alpha \in \mathbb{B}_2$ 矛盾．因此 $\varphi \circ \sigma_\psi \neq \sigma_\psi \circ \varphi$, 由定理 3.2 可知 $[W^*_{v,\psi}, W_{u,\varphi}]$ 非紧． ▮

参 考 文 献

[1] Clifford J, Levi D, Narayan S. Commutators of composition operators with adjoints of composition operators. Complex Var Elliptic Equ, 2012, **57**: 677–686

[2] Jung S, Kim Y, Ko E. Commutators of weighted composition operators. Internat J Math, 2014, **25**(6): 1450053

[3] Lacruz M, León-Saavedra F, Petrovic S, et al. The double commutant property for composition operators. Collect Math, 2019, **70**: 501–532

[4] Jiang L Y, Ouyang C H. Essential normality of linear fractional composition operators in the unit ball of C^N. Science in China: Mathematics, 2009, **52**(12): 2668–2678

[5] Jiang L Y. Commutators of composition operators with adjoints of composition operators on the ball. Complex Var Elliptic Equ, 2016, **61**(3): 405–421

[6] Cowen C C, MacCluer B D. Linear fractional maps of the ball and their composition operators. Acta Sci Math(Szeged), 2000, **66**(1/2): 351–376

[7] Bisi C, Bracci F. Linear fractional maps of the unit ball: a geometric study. Adv Math, 2002, **167**(2): 265–287

[8] MacCluer B D, Weir R J. Linear-fractional composition operators in several variables. Integral Equations and Operator Theory, 2005, **53**(3): 373–402

[9] McDonald G. Fredholm properties of a class of Toeplitz operators on the ball. Indiana Univ Math J, 1977, **26**: 567–576

[10] Bracci F, Contreras M, Diaz-Madrigal S. Classification of semigroups of linear fractional maps in the unit ball. Adv Math, 2007, **208**: 318–350

[11] Heller K, MacCluer B D, Weir R J. Compact differences of composition operators in several variables. Integral Equations and Operator Theory, 2011, **69**(2): 247–268

[12] Cowen C C, MacCluer B D. Composition Operators on Spaces of Analytic Functions. Boca Raton, Fla: CRC Press, 1995

Commutators of Weighted Composition Operators on Hardy Space of the Unit Ball

[1]Xu Ning [2]Zhou Zehua [1]Ding Ying

([1]*School of Science, Jiangsu Ocean University, Jiangsu Lianyungang 222005;*
[2]*Department of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300072*)

Abstract: In this paper, we study commutators of weighted composition operators with linear fractional non-automorphisms on Hardy space of the unit ball. First, we obtain the formula of commutators of weighted composition operators. Then, we characterize compactness of commutators according to two special situations of linear fractional maps. Finally, we obtain that commutators are compact when linear fractional maps are parabolic and commutators are not compact when linear fractional maps are hyperbolic.

Key words: Hardy spaces; Weighted composition operators; Commutators.

MR(2010) Subject Classification: 47B38; 47B47