



压缩感知 OMP 算法下信号重建方法研究

付敏 郝嘉骏 解烈军 王金平*
(宁波大学数学与统计学院 浙江宁波 315211)

摘要: 该文给出了一种 OMP 算法的改进方法, 然后研究在噪声影响下的 OMP 算法的稀疏重建问题, 得到稀疏重建的关于信噪比参数的条件. 最后, 利用数值模拟验证上述结论.

关键词: 压缩感知 OMP 算法; 稀疏重建; 信噪比.

MR(2010) 主题分类: 34A08; 65R10; 44A15 **中图分类号:** O175.5 **文献标识码:** A

文章编号: 1003-3998(2021)05-1555-11

1 引言

压缩感知 (Compressed Sensing, CS)^[1] 理论是一种新型信号采样理论. CS 理论指出: 在信号是稀疏的前提下, 重构算法能够从满足一定条件的少量线性测量中高概率地重建出高维稀疏信号. 基于自然信号中的大多数信号是稀疏的, CS 理论被广泛应用到各个领域, 比如单像素相机、低秩矩阵恢复、核磁共振成像等^[2–4]. 令 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \in \mathbb{R}^N$ 是 K 维稀疏信号 (即 $\|\mathbf{x}\|_0 \leq K$), $\Gamma = \text{supp}(\mathbf{x}) = \{i \mid |x_i| \neq 0\}$ 表示信号 \mathbf{x} 的支撑. 假设测量过程中含有噪声, 相应的测量值 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 满足以下线性模型

$$\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} + \mathbf{w}, \quad (1.1)$$

其中, 感知矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times N}$, ($n \ll N$), K 维稀疏信号 \mathbf{x} 是确定的, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ 是噪声, Φ_i 表示 Φ 的第 i 列 (即 $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N]$). 在下文中, 假设 Φ 的每一列 (通常称为一个原子) 是归一化的 (即 $\|\Phi_i\|_2 = 1$, $i = 1, 2, \dots, N$).

重建稀疏信号是 CS 理论的首要目标. 因为 $n \ll N$, 欠定系统 (1.1) 的解通常是不唯一的. 然而, 由于稀疏的先验知识, CS 理论^[5] 表明: 在采样矩阵 Φ 满足一定条件下, 求解 l_0 -范数最小化问题能够高概率地重建信号 \mathbf{x} , 即

$$\min \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{subject to} \quad \|\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}\|_2 < \epsilon.$$

众所周知, 寻找最优的解需要穷尽一切可能的搜索, 这是 NP - 难的. 因此, 需要寻找一种有效率的重建算法取代穷尽的搜索. 此时, 正交匹配追踪 (Orthogonal Matching Pursuit, OMP)

收稿日期: 2020-03-09; 修订日期: 2021-03-15

E-mail: 2818391447@qq.com; 825821801@qq.com; xieliejun@nbu.edu.cn; wangjinping@nbu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金 (62071262)

Supported by the NSFC(62071262)

* 通讯作者

算法由于它易操作和高效率而引起关注。OMP 算法^[6] 是一种迭代型贪婪算法。其原理为：在每次迭代中，选择与当前残差内积绝对值最大的矩阵的一个列来逐步逼近原始信号。许多学者研究 OMP 算法的改进形式。比如分段正交匹配追踪 (Stagewise OMP, StOMP)^[7] 算法，压缩采样匹配追踪 (Compressive Sampling MP, CoSamp)^[8] 算法，子空间追踪 (Subspace Pursuit, SP)^[9] 算法，广义正交匹配追踪 (generalised OMP, gOMP)^[10] 算法等。本文提出 OMP 算法的一种改进方法来重建稀疏信号。相比于标准的 OMP 算法，唯一的区别是加入系数阈值判断机制。

测量矩阵 Φ 的两个特性经常用于保证 OMP 算法的精确重建。

定义 1.1^[11] 测量矩阵 Φ 的相关性质：测量矩阵 Φ 的每一列是归一化的 ($\|\Phi_i\|_2 = 1, \Phi_i$ 是 Φ 的第 i 列向量， $i \in [N]$) Φ 的相关系数 $\mu(\Phi)$ 为

$$\mu(\Phi) := \max_{i,j \in [N], i \neq j} |\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle|.$$

定义 1.2^[12] 测量矩阵 Φ 的 K -阶约束等距性质 (Restricted Isometry Property, RIP)：如果存在 $\delta_K \in (0, 1)$ ，使得

$$\sqrt{1 - \delta_K} \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\Phi \mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{1 + \delta_K} \|\mathbf{x}\|_2,$$

对任意 K -稀疏向量 \mathbf{x} 都成立。满足上式的最小常数 δ_K 称为矩阵 Φ 的 K -阶约束等距常数 (Restricted Isometry Constant, RIC)。

考虑到一些矩阵满足限制等距性，但不满足相干性条件的情况，许多学者研究了重建算法下采样矩阵的限制等距性。在无噪声情况下（即， $w = 0$ ），Davenport 和 Wakin^[13] 证得 $\delta_{K+1} < \frac{1}{\sqrt{3K}}$ 是 OMP 算法精确重建输入信号的一个充分条件。随后条件逐步改进为 $\delta_{K+1} < \frac{1}{(1+\sqrt{2})\sqrt{K}}$, $\delta_K < \frac{\sqrt{K-1}}{\sqrt{K-1+K}}$, $\delta_{K+1} < \frac{1}{1+\sqrt{K}}$ (参见文献 [14–16])。在有噪声情况下（即， $w \neq 0$ ），我们往往关注于重建信号 \mathbf{x} 的支撑（即， $\text{supp}(\mathbf{x})$ ）。一旦 $\text{supp}(\mathbf{x})$ 准确找出，信号 \mathbf{x} 可由最小二乘估计得出。在文献 [17] 中已经证明：当测量矩阵满足一定的 MCSNR 和 $\delta_{K+1} < \frac{1}{2+\sqrt{K}}$ 条件时，OMP 算法能从噪声测量中准确重建信号的支撑。随后条件逐步改进为 $\delta_{K+1} < \frac{1}{\sqrt{K+1}}$ (参见文献 [18])， $\delta_{K+1} < \frac{\sqrt{4K+1}-1}{2K}$ (参见文献 [19])。最近，已经证得 $\delta_{K+1} < \frac{1}{\sqrt{K+1}}$ (参见文献 [20]) 是一个尖锐充分条件。

本文的主要内容如下。

- 提出 OMP 算法的一种改进方法，通过加入一个系数阈值机制来提高重建信号的精确度。

• 基于矩阵的 RIP 的一定条件下，本文给出 OMP 算法重建信号支撑的一个关于 SNR 的条件。接着，关于 SNR 和不同噪声水平下的数据仿真来证明理论结果。

首先，基于这篇文章的框架有以下假设与引理

(A1) $|S|$ 表示集合 S 的元素的个数。

(A2) $\Phi_\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times |\Gamma|}$ 是其列索引是属于集合 Γ 里的子矩阵。

(A3) $\mathbf{x}_\Gamma \in R^{|\Gamma|}$ 表示 \mathbf{x} 非零分量下脚标限制在集合 Γ 。

(A4) Φ^T 表示矩阵 Φ 的转置。

(A5) $\Phi_\Gamma^\dagger = (\Phi_\Gamma^T \Phi_\Gamma)^{-1} \Phi_\Gamma^T$ 表示矩阵 Φ_Γ 的伪逆。

引理 1.1^[12] 对于 $0 < p < q \leq \infty$ ，有 $\|\mathbf{x}\|_q \leq \|\mathbf{x}\|_p$ ，特别地， $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2$ 。

引理 1.2^[12] 令 $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times N}$ 满足 k_1, k_2 阶 RIP 性质，以下不等式成立：对于任意整数 $k_1 \leq k_2$ ，有 $\delta_{k_1} \leq \delta_{k_2}$ 。

引理 1.3^[12] 令 $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times N}$ 满足 $K+1$ 阶的 RIP 性质, 并且 $S \subset \{1, 2, \dots, N\}$, $|S| \leq K$, 接着对于任意的 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\sqrt{1 - \delta_{k+1}} \|\mathbf{z}\|_2 \leq \|\Phi_S^T \mathbf{z}\|_2 \leq \sqrt{1 + \delta_{k+1}} \|\mathbf{z}\|_2.$$

定义 1.3 信号 \mathbf{x} 经过测量矩阵 Φ 线性观测后, 得到测量值 $\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} + \mathbf{w}$, 信号 \mathbf{x} 的信噪比 (Signal to Noise Ratio, SNR) 定义为

$$\text{SNR} = \frac{\|\Phi\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{w}\|_2^2},$$

定义 1.4 信号 \mathbf{x} 经过测量矩阵 Φ 线性观测后, 得到测量值 $\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} + \mathbf{w}$, 信号 \mathbf{x} 的最小平均分量比 (Minimum to Average Ratio, MAR) 定义为

$$\text{MAR} = \frac{\min_{j \in \Gamma} |x_j|^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2 / k}.$$

2 主要结果

OMP 算法步骤如下

表 1 OMP 算法

输入: 样本 \mathbf{y} , 采样矩阵 Φ , 稀疏度 K
步骤 1(识别): $\Lambda^k = \arg \max_{\Upsilon \in \Gamma \setminus \Lambda_{k-1}} \langle \Phi_\Upsilon, r^{k-1} \rangle $
步骤 2(增加): $\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \cup \Lambda^k$
步骤 3(估计): $\mathbf{x}^{(k)} = \arg \min_{\text{supp}(\mathbf{u}) = \Lambda_k} \ \mathbf{y} - \Phi\mathbf{u}\ _2$
步骤 4(更新): $\mathbf{r}_k = \mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}^{(k)}$
输出: 重建信号 $\mathbf{x}^{(K)}$, 最优原子集 Λ_K

在搜寻过程中, 如果有一个原子选错了, OMP 算法的输出将不正确. 为了改进 OMP 算法的重建性能, 引入一个阈值判断机制.

表 2 改进的 OMP 算法

输入: 样本 \mathbf{y} , 采样矩阵 Φ , 稀疏度 K
步骤 1(识别): $\Lambda^k = \arg \max_{\Upsilon \in \Gamma \setminus \Lambda_{k-1}} \langle \Phi_\Upsilon, r^{k-1} \rangle $
步骤 2(增加): $\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \cup \Lambda^k$
步骤 3(估计): $\mathbf{x}^{(k)} = \arg \min_{\text{supp}(\mathbf{u}) = \Lambda_k} \ \mathbf{y} - \Phi\mathbf{u}\ _2$
步骤 4(筛选): 若 $\ \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\ _2 \leq \ \mathbf{y}\ _2$, 是, 接着步骤 5, 否则, 步骤 1.
步骤 5(更新): $\mathbf{r}_k = \mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}^{(k)}$
输出: 输出信号 $\mathbf{x}^{(K)}$, 最优原子集 Λ_K

为了确保每次迭代中选择一个正确的原子，我们分析第 k 次 ($1 \leq k \leq K$) 迭代，在前面 $k-1$ 次迭代中正确识别的假设下，当第 k 次 \mathbf{x} 的支撑已经被 OMP 算法识别，有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_2 &= \|\Phi_{\Lambda_k}^\dagger \mathbf{y} - \Phi_{\Lambda_{k-1}}^\dagger \mathbf{y}\|_2 = \|\Phi_{\Gamma_k}^\dagger \mathbf{y} - \Phi_{\Gamma_{k-1}}^\dagger \mathbf{y}\|_2 \\ &= \|(\Phi_{\Gamma_k}^T \Phi_{\Gamma_k})^{-1} \Phi_{\Gamma_k}^T \mathbf{y}\|_2 \leq \|\mathbf{y}\|_2.\end{aligned}$$

噪声下，OMP 算法求解的最优化问题为

$$\min \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{subject to} \quad \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon. \quad (2.1)$$

引理 2.1 假设 Φ 具有 $k+1$ 阶限制等距性质，索引集 $\Lambda, \Gamma \subset [N]$ ，则

$$\begin{aligned}&\|\Phi_{\Gamma \setminus \Lambda}^T P_\Lambda^\perp \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda} \mathbf{x}_{\Gamma \setminus \Lambda}\|_\infty - \|\Phi_{\Gamma^c}^T P_\Lambda^\perp \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda} \mathbf{x}_{\Gamma \setminus \Lambda}\|_\infty \\ &\geq \frac{1 - \sqrt{|\Gamma \setminus \Lambda| + 1} \delta_{|\Gamma|+1}}{\sqrt{|\Gamma \setminus \Lambda|}} \|\mathbf{x}_{\Gamma \setminus \Lambda}\|_2.\end{aligned}$$

在文献 [21] 的引理 1 中，假设 (1) 中 Φ 具有 $k+1$ 阶限制等距性质，集合 S 是 Ω 的真子集（即， $S \subsetneq \Omega$ ），则

$$\begin{aligned}&\|A_{\Omega \setminus S}^T P_S^\perp A_{\Omega \setminus S} \mathbf{x}_{\Omega \setminus S}\|_\infty - \|A_{\Omega^c}^T P_S^\perp A_{\Omega \setminus S} \mathbf{x}_{\Omega \setminus S}\|_\infty \\ &\geq \frac{1 - \sqrt{|\Omega| - |S| + 1} \delta_{|\Omega|+1}}{\sqrt{|\Omega| - |S|}} \|\mathbf{x}_{\Omega \setminus S}\|_2.\end{aligned}$$

引理 2.1 的证明实际上是文献 [21] 引理 1 的推广。注意到文献 [21] 中引理 1 只考虑了情况： S 是 Ω 的真子集（即， $S \subsetneq \Omega$ ）。我们的贡献是将这种情况推广到 $\Omega \cap S \neq \emptyset$ （即，在本文中 $\Gamma \cap \Lambda \neq \emptyset$ ）。而且，容易想到：当 $\Lambda = \emptyset$ （因为 $\Lambda = \emptyset$ 满足引理 2.1 条件的），则

$$\|\Phi_\Gamma^T \Phi \mathbf{x}\|_\infty - \|\Phi_{\Gamma^c}^T \Phi \mathbf{x}\|_\infty \geq \frac{1 - \sqrt{|\Gamma| + 1} \delta_{|\Gamma|+1}}{\sqrt{|\Gamma|}} \|\mathbf{x}\|_2.$$

定理 2.1 假设感知矩阵 Φ 具有 $k+1$ 阶限制等距性质且 $\delta_{k+1} < \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ ，则 OMP 算法能够在 k 次迭代之内，精确恢复 $\text{supp}(\mathbf{x})$ ，如果有下面的等式成立

$$\sqrt{\text{SNR}} > \frac{2\sqrt{K}(1 + \delta_{K+1})}{(1 - \sqrt{K+1}\delta_{K+1})\sqrt{\text{MAR}}}.$$

证 证明包括两个步骤。首先分别给出 OMP 算法在第 1 次，第 k 次迭代中选择正确原子的两个条件。接着建立 OMP 算法的全局性条件。

由算法的步骤 3，对于任意 $k < K$ ， K -稀疏信号 \mathbf{x} ，OMP 算法将在第 $(k+1)$ 次迭代选择正确的原子，如果

$$\max_{i \in \Gamma} |\Phi_i^T \mathbf{r}^k| > \max_{j \in \Gamma^c} |\Phi_j^T \mathbf{r}^k|. \quad (2.2)$$

为了证明式 (2.2)，等价于证明

$$\max_{i \in \Gamma \setminus \Lambda^k} |\langle \mathbf{r}^k, \Phi_i \rangle| > \max_{j \in \Gamma^c} |\langle \mathbf{r}^k, \Phi_j \rangle|. \quad (2.3)$$

由算法的步骤 5 可得

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{y} - \Phi_{\Lambda_k} \Phi_{\Lambda_k}^\dagger \mathbf{y} = (\mathbf{I} - \Phi_{\Lambda_k} \Phi_{\Lambda_k}^\dagger)(\Phi_\Gamma \mathbf{x}_\Gamma + \mathbf{w}) = P_{\Lambda_k}^\perp \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \mathbf{x}_{\Gamma \setminus \Lambda_k} + P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w}.$$

第一次迭代选择正确的原子.

在第一次迭代, OMP 算法选中的一个原子 Φ_{Λ^1} 是与测量向量 \mathbf{y} 最大程度地相关. 由范数的性质得

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{y}, \Phi_{\Lambda^1} \rangle| &= \max_{i \in \Gamma} |\langle \mathbf{y}, \Phi_i \rangle| = \|\Phi_{\Gamma}^T \mathbf{y}\|_{\infty} = \|\Phi_{\Gamma}^T(\Phi \mathbf{x} + \mathbf{w})\|_{\infty} \\ &\geq \|\Phi_{\Gamma}^T \Phi \mathbf{x}\|_{\infty} - \|\Phi_{\Gamma}^T \mathbf{w}\|_{\infty} \geq \|\Phi_{\Gamma}^T \Phi \mathbf{x}\|_{\infty} - \|\Phi_{\Gamma}^T \mathbf{w}\|_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

另一方面, 如果在第一次迭代, OMP 算法选错了一个原子 Φ_{j_0} (即, $j_0 \in \Gamma^c$), 得

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{y}, \Phi_{j_0} \rangle| &= \max_{j \in \Gamma^c} |\langle \mathbf{y}, \Phi_j \rangle| = \|\Phi_{\Gamma^c}^T \mathbf{y}\|_{\infty} = \|\Phi_{\Gamma^c}^T(\Phi \mathbf{x} + \mathbf{w})\|_{\infty} \\ &\leq \|\Phi_{\Gamma^c}^T \Phi \mathbf{x}\|_{\infty} + \|\Phi_{\Gamma^c}^T \mathbf{w}\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

由式 (2.4) 和式 (2.5), 为证式 (2.3), 需证

$$\|\Phi_{\Gamma}^T \Phi \mathbf{x}\|_{\infty} - \|\Phi_{\Gamma^c}^T \Phi \mathbf{x}\|_{\infty} > \|\Phi_{\Gamma}^T \mathbf{w}\|_2 + \|\Phi_{\Gamma^c}^T \mathbf{w}\|_{\infty}. \quad (2.6)$$

由引理 2.1, 得

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\Gamma}^T \Phi \mathbf{x}\|_{\infty} - \|\Phi_{\Gamma^c}^T \Phi \mathbf{x}\|_{\infty} &\geq \frac{1 - \sqrt{|\Gamma| + 1} \delta_{|\Gamma|+1}}{\sqrt{|\Gamma|}} \|\mathbf{x}\|_2 \\ &= \frac{1 - \sqrt{K + 1} \delta_{K+1}}{\sqrt{K}} \|\mathbf{x}\|_2, \end{aligned}$$

接下来给出不等式 (2.6) 右边的上界. 明显地, 存在 $j' \in \Gamma^c$ 使得

$$\|\Phi_{\Gamma^c}^T \mathbf{w}\|_{\infty} = |\Phi_{j'}^T \mathbf{w}| \stackrel{a}{=} \|\Phi_{j'}^T \mathbf{w}\|_2,$$

(a): $\Phi_{j'}^T \mathbf{w}$ 是 1×1 向量. 由引理 1.3 得

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\Gamma}^T \mathbf{w}\|_2 + \|\Phi_{\Gamma^c}^T \mathbf{w}\|_{\infty} &= \|\Phi_{\Gamma}^T \mathbf{w}\|_2 + \|\Phi_{j'}^T \mathbf{w}\|_2 \\ &\leq \sqrt{1 + \delta_{K+1}} \|\mathbf{w}\|_2 + \sqrt{1 + \delta_1} \|\mathbf{w}\|_2 \\ &= 2(\sqrt{1 + \delta_{K+1}}) \|\mathbf{w}\|_2. \end{aligned}$$

因此, 式 (2.6) 可由下式保证

$$\frac{1 - \sqrt{K + 1} \delta_{K+1}}{\sqrt{K}} \|\mathbf{x}\|_2 > 2(\sqrt{1 + \delta_{K+1}}) \|\mathbf{w}\|_2. \quad (2.7)$$

进一步地

$$\|\Phi \mathbf{x}\| \leq \sqrt{1 + \delta_K} \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{1 + \delta_{K+1}} \|\mathbf{x}\|_2,$$

可证式 (2.7) 成立如果

$$\frac{1 - \sqrt{K + 1} \delta_{K+1}}{\sqrt{K}} > \frac{2(1 + \delta_{K+1})}{\sqrt{\text{SNR}}}$$

成立, 即

$$\sqrt{\text{SNR}} > \frac{2\sqrt{K}(1 + \delta_{K+1})}{1 - \sqrt{K + 1} \delta_{K+1}} \quad (2.8)$$

成立.

第 $k+1$ 次迭代选择正确的原子.

假设 OMP 算法在前面 k 次迭代中选择正确的原子, 则需要证明 OMP 算法在第 $(k+1)$ 次迭代中也选择了正确的原子 (即 $\Lambda_k \subset \Gamma$). 只要证明式 (2.2) 成立即可. 由引理 1.1 得

$$\begin{aligned} \max_{i \in \Gamma \setminus \Lambda_k} |\langle \mathbf{r}^k, \Phi_i \rangle| &= \| \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k}^T (P_{\Lambda_k}^\perp \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \mathbf{x}_{\Gamma \setminus \Lambda_k} + P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w}) \|_\infty \\ &\geq \| \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k}^T P_{\Lambda_k}^\perp \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \mathbf{x}_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \|_\infty - \| \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k}^T P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w} \|_\infty \\ &\geq \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k}^T P_{\Lambda_k}^\perp \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \mathbf{x}_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \|_\infty - \| \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k}^T P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w} \|_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

和

$$\begin{aligned} \max_{j \in \Gamma^c} |\langle \mathbf{r}^k, \Phi_j \rangle| &= \| \Phi_{\Gamma^c}^T (P_{\Lambda_k}^\perp \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \mathbf{x}_{\Gamma \setminus \Lambda_k} + P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w}) \|_\infty \\ &\leq \| \Phi_{\Gamma^c}^T P_{\Lambda_k}^\perp \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \mathbf{x}_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \|_\infty + \| \Phi_{\Gamma^c}^T P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w} \|_\infty. \end{aligned} \quad (2.10)$$

由式 (2.9) 和式 (2.10), 要证式 (2.3), 只需证

$$\begin{aligned} &\| \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k}^T P_{\Lambda_k}^\perp \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \mathbf{x}_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \|_\infty - \| \Phi_{\Gamma^c}^T P_{\Lambda_k}^\perp \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \mathbf{x}_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \|_\infty \\ &> \| \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k}^T P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w} \|_2 + \| \Phi_{\Gamma^c}^T P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w} \|_\infty. \end{aligned} \quad (2.11)$$

接下来, 给出式 (2.11) 左边的一个下界. 由假设 $\Lambda_k \subset \Gamma$ 和引理 2.1, 有

$$\begin{aligned} &\| \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k}^T P_{\Lambda_k}^\perp \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \mathbf{x}_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \|_\infty - \| \Phi_{\Gamma^c}^T P_{\Lambda_k}^\perp \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \mathbf{x}_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \|_\infty \\ &\geq \frac{1 - \sqrt{|\Gamma| - |\Lambda_k| + 1} \delta_{|\Gamma|+1}}{\sqrt{|\Gamma| - |\Lambda_k|}} \| \mathbf{x}_{\Gamma \setminus \Lambda_k} \|_2 \\ &\geq (1 - \sqrt{K+1} \delta_{K+1}) \min_{i \in \Omega} |x_i| \geq ((1 - \sqrt{K+1} \delta_{K+1}) (\frac{\sqrt{\text{MAR}} \| \Phi \mathbf{x} \|_2}{\sqrt{K}})) \\ &= (\frac{1 - \sqrt{K+1} \delta_{K+1}}{\sqrt{K}}) (\sqrt{\text{MAR}} \sqrt{\text{SNR}}) \| \mathbf{w} \|_2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

接下来, 给出式 (2.11) 右边的一个上界. 由假设 $\Lambda_k \subset \Gamma$, 明显地, 存在 $j_1 \in \Gamma^c$ 使得

$$\| \Phi_{\Gamma^c}^T P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w} \|_\infty = \| \Phi_{j_1}^T P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w} \| \stackrel{b}{=} \| \Phi_{j_1}^T P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w} \|_2,$$

(b): $\Phi_{j_1}^T P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w}$ 是 1×1 向量. 由引理 1.1, 有

$$\begin{aligned} \| \Phi_{\Gamma \setminus \Lambda_k}^T P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w} \|_2 + \| \Phi_{\Gamma^c}^T P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w} \|_\infty &= \| \Phi_{\Gamma}^T P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w} \|_2 + \| \Phi_{j_1}^T P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w} \|_2 \\ &\leq \sqrt{1 + \delta_{K+1}} \| P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w} \|_2 + \sqrt{1 + \delta_1} \| P_{\Lambda_k}^\perp \mathbf{w} \|_2 \\ &\leq 2 \sqrt{1 + \delta_{K+1}} \| \mathbf{w} \|_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

联立式 (2.12) 和式 (2.13), 式 (2.11) 可由下式保证

$$(\frac{1 - \sqrt{K+1} \delta_{K+1}}{\sqrt{K}}) (\sqrt{\text{MAR}} \sqrt{\text{SNR}}) > 2 \sqrt{1 + \delta_{K+1}}.$$

即

$$\sqrt{\text{SNR}} > \frac{2 \sqrt{K} (1 + \delta_{K+1})}{(1 - \sqrt{K+1} \delta_{K+1}) \sqrt{\text{MAR}}}.$$

进一步地, 观察到

$$\frac{2\sqrt{K}(1+\delta_{K+1})}{(1-\sqrt{K+1}\delta_{K+1})\sqrt{\text{MAR}}} > \frac{2\sqrt{K}(1+\delta_{K+1})}{1-\sqrt{K+1}\delta_{K+1}}.$$

要证式 (2.11) 也可由下式保证

$$\sqrt{\text{SNR}} > \frac{2\sqrt{K}(1+\delta_{K+1})}{(1-\sqrt{K+1}\delta_{K+1})\sqrt{\text{MAR}}}. \quad (2.14)$$

定理 2.1 证毕. |

注 2.1 由式 (2.13), 在 $(k+1)$ 次迭代, OMP 算法能够选择正确的原子, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_2 &= \|\mathbf{x}_\Gamma - \Phi_{\Lambda_k}^\dagger(\Phi_\Gamma \mathbf{x}_\Gamma + \mathbf{w})\|_2 = \|\mathbf{x}_\Gamma - \Phi_\Gamma^\dagger(\Phi_\Gamma \mathbf{x}_\Gamma + \mathbf{w})\|_2 \\ &= \|\Phi_\Gamma^\dagger \mathbf{w}\|_2 \stackrel{a}{\leq} \frac{\|\Phi_\Gamma \Phi_\Gamma^\dagger \mathbf{w}\|_2}{\sqrt{1-\delta_{|\Gamma|}}} = \frac{\|P_\Gamma \mathbf{w}\|_2}{\sqrt{1-\delta_K}} \leq \frac{\|\mathbf{w}\|_2}{\sqrt{1-\delta_{K+1}}} \\ &\leq \sqrt{\frac{\sqrt{K+1}}{\sqrt{K+1}-1}} \|\mathbf{w}\|_2, \end{aligned}$$

(a): 由引理 1.3 可得. 由 $\delta_{K+1} < \frac{1}{\sqrt{K+1}}$, 可得原始信号和恢复信号的 l_2 -范数误差理论界.

引理 2.2 如果矩阵 Φ 满足的 $K+1$ 阶约束等距常数是 $\delta_{K+1} < \frac{1}{\sqrt{K+1}}$. 则

$$(1-\sqrt{K+1}\delta_{K+1})^2 < 1-\delta_{K+1}^2. \quad (2.15)$$

证 要证的式子可以转化成

$$(K+2)\delta_{K+1}^2 - 2\sqrt{K+1}\delta_{K+1} \leq 0, \quad (2.16)$$

这时 $\delta_{K+1} = 0$, 式 (2.16) 显然满足, 这时 $\delta_{K+1} \neq 0$, 式 (2.16) 等价于

$$\delta_{K+1} \leq \frac{1}{\frac{K+2}{\sqrt{K+1}}}.$$

对任意正整数 K , 有

$$\sqrt{K+1} \geq \frac{K+2}{2\sqrt{K+1}},$$

得到 $\delta_{K+1} < \frac{1}{\sqrt{K+1}}$ 是充分条件, 因此不等式 (2.14) 成立. |

定理 2.2 假设 Φ 满足 $K+1$ 阶约束等距性质, 且 $\delta_{K+1} < \frac{1}{\sqrt{K+1}}$. 存在 $\{\Phi, \mathbf{x}, \mathbf{w}\}$, 有

$$\sqrt{\text{SNR}} < \frac{\sqrt{K}\sqrt{1-\delta_{K+1}}\sqrt{1+\delta_{K+1}}}{(1-\sqrt{K+1}\delta_{K+1})\sqrt{\text{MAR}}}, \quad (2.17)$$

使得 OMP 算法在 k 次迭代内未能从 $\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} + \mathbf{w}$ 中精确恢复 $\text{supp}(\mathbf{x})$.

在 RIC 的限制下, OMP 算法关于 SNR 的支撑恢复的一个最差的必要条件

$$\sqrt{\text{SNR}} \geq \frac{\sqrt{K}\sqrt{1-\delta_{K+1}}\sqrt{1+\delta_{K+1}}}{(1-\sqrt{K+1}\delta_{K+1})\sqrt{\text{MAR}}}.$$

证 要证存在线性模型 $\{\Phi, \mathbf{x}, \mathbf{w}\}$, 满足定理的条件, 但是 OMP 算法未能在第 k 次迭代内精确恢复 $\text{supp}(\mathbf{x})$. 首先构建一个线性模型. 令 $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是个单位阵, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 是一个 K -稀疏信号, 且 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ 是个 1 - 稀疏噪声向量

$$\Phi = I_n, \mathbf{x} = [1, \dots, 1, 0, \dots, 0]^T, \mathbf{w} = [0, \dots, 0, 1]^T,$$

接着得到 $\mathbf{y} = [1, \dots, 1, 0, \dots, 1]^T$. 这种情况有

$$\delta_{K+1} = 0, \sqrt{\text{SNR}} = \frac{\|\Phi\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2} = \sqrt{K}, \sqrt{\text{MAR}} = 1.$$

由式 (2.15), 有

$$1 - \sqrt{K+1}\delta_{K+1} < \sqrt{1 - \delta_{K+1}^2}.$$

可见该模型满足定理 2.2 的条件, 然而, OMP 算法未能精确恢复信号 \mathbf{x} 的支撑. 特别地, 在第一次迭代中

$$|\langle \mathbf{y}, \Phi_i \rangle| = \begin{cases} 1, & \text{if } 1 \leq i \leq K, i = n, \\ 0, & \text{if } K < i < n. \end{cases}$$

OMP 算法不能保证在第一次迭代中选择正确的原子. ■

3 数值模拟

3.1 不同 SNR 程度下的信号恢复

很难设计出采样矩阵的任意阶都满足定理 2.1 中 RIC 的界. 该实验借助文献 [13] 的矩阵, 其 RIC 常数小于 0.2.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_9 & 0.0526 \cdot \mathbf{1} \\ \mathbf{0}^T & 0.9733 \end{bmatrix}.$$

令 $\mathbf{x} = [0.5, -1.5, 0.5, -2, -1, 0, -0.8, 0.1, 1.7, 1]^T$. 通过调节噪声来得到值为 3.38 的 SNR. OMP 算法用于从噪声测量 $\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} + \mathbf{w}$ 重建稀疏信号 \mathbf{x} . 原始和重建信号可从图 1 读出.

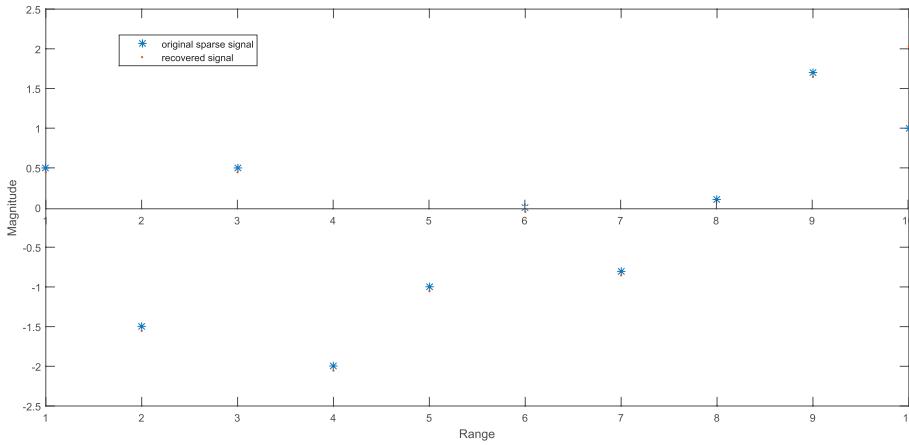


图 1 原始信号和重建信号

从图 1 中看出, 重建信号不能识别原始信号 \mathbf{x} 的第 8 个分量.

保持 9 - 稀疏信号 \mathbf{x} 不变, MAR 显然未改变. 用不同的噪声来控制 SNR 值. 模拟结果被以下表格展示.

表 3 不同 SNR 值下的信号恢复

SNR	支撑的识别
337.85	成功
187.69	成功
112.62	成功
93.85	成功
80.44	成功
3.38	失败

表 3 证明定理 2.1 的结论: 如果 SNR 值满足定理 2.1 的充分条件, 并且矩阵满足 RIC 条件, 支撑可以被准确的识别.

3.2 不同噪声水平的信号恢复

根据前面的分析, 即使原始信号的支撑被准确识别, 原始稀疏信号由于存在的噪声仍然不能精确的重建. 该实验的噪声范围在 0 到 0.1 并每隔 0.01 取一次, 接着, 对于每个噪声水平, 采取一个新的测量矩阵服从随机独立分布, 测量信号由 $\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} + \mathbf{w}$ 计算得出. 最后, 改进算法重复 1000 次左右, 最大的误差余平均误差如图 2.

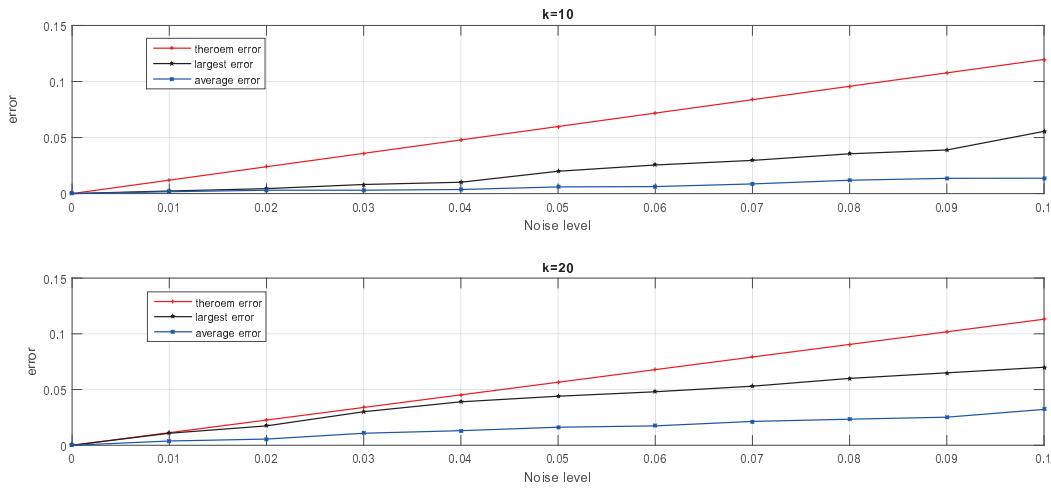


图 2 不同噪声水平的重建误差

图 2 证明了理论上界的误差范围: 当稀疏度 K 固定时, 误差几乎与噪声成线性关系. 明显的是 K 越大, 与理论上仿真的结果越接近.

3.3 改进算法下的图像去噪

当噪声是 Gaussian 噪声时. 原始清晰图像是 256×256 CT 图像 [22].

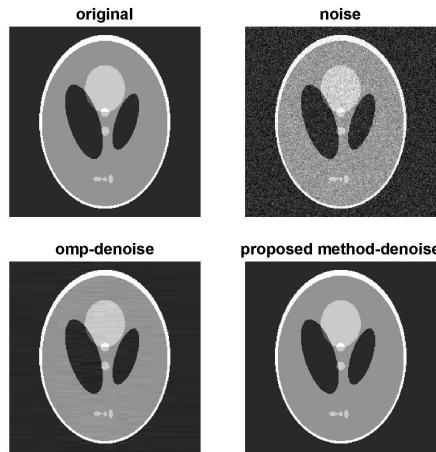


图 3 OMP 和改进算法下的图像去噪

在本次实验中，模糊的图像在改进 OMP 算法的重建下图像较清晰.

参 考 文 献

- [1] Dnoho D L. Compressed sensing. *IEEE Trans Inf Theory*, 2006, **52**(4): 1289–1306
- [2] Duarte M F, Davenport M A, Takhar D, et al. Single-pixel imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 83–91
- [3] Candès E J, Tao T. The power of convex relaxation: Near-optimal matrix completion. *IEEE Trans Inf Theory*, 2010, **56**(5): 2053–2080
- [4] Vasanawala S, Alley M, Hargresves B, et al. Improved pediatric MR imaging with compressed sensing. *Radiology*, 2010, **256**(2): 607–616
- [5] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans Inf Theory*, 2006, **52**(2): 489–509
- [6] Rezaifar Y, Krishnaprasad P S. Orthogonal Matching Pursuit: Recursive Function Approximation with Applications to Wavelet Decomposition[C]//Proceedings of 27th Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers. Pacific Grove, CA: IEEE, 2002
- [7] Dnoho D L, Tsai Y, Drori I, et al. Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit. *IEEE Trans Inf Theory*, 2012, **58**(2): 1094–1121
- [8] Needell D, Tropp J A. Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Appl Comput Harmon Anal*, 2009, **26**(3): 301–321
- [9] Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction. *IEEE Trans Inf Theory*, 2009, **55**(5): 4316–4332
- [10] Wang J, Kwon S, Shim B. Generalized orthogonal matching pursuit. *IEEE Trans Signal Processing*, 2012, **60**(12): 6202–6216
- [11] 李峰, 郭毅. 压缩感知浅析. 北京: 科学出版社, 2015
Li F, Guo Y. Compression Perception Analysed. Beijing: Science Press, 2015
- [12] Foucart S, Rauhut H. A Mathematical Introduction to Compressive Sensing. Berlin: Springer-Verlag, 2013
- [13] Davenport A M, Wakin B M. Analysis of orthogonal matching pursuit using restricted isometry property. *IEEE Trans Inf Theory*. Theory, 2010, **56**: 4395–4401
- [14] Liu E, Temlyakov V. The orthogonal super greedy algorithm and applications in compressed sensing. *IEEE Trans Inf Theory*, 2012, **58**(4): 2040–2047
- [15] Wang J, Kwon S, Shim B. Near optimal bound of orthogonal matching pursuit using restricted isometric constant. *Eur J Adv Signal Processing*, 2012, **8**: 1874–1890
- [16] Wang J, Shim B. On the recovery limit of sparse signals using orthogonal matching pursuit. *IEEE Trans Signal Processing*, 2012, **60**(9): 4973–4976

- [17] Li J, Wang Q, Shen Y. Near optimal condition of OMP algorithm in recovering sparse signal from noisy measurement. *Systems Engineering and Electronics*, 2014, **25**(4): 547–553
- [18] Maleh R. Improved RIP analysis of orthogonal matching pursuit. *Computer Science*, 2011, **3**: 782–794
- [19] Chang L H, Wu J Y. An improved RIP-based performance guarantee for the sparse signal recovery via orthogonal matching pursuit. *IEEE Trans Inf Theory*, 2014, **60**(9): 4973–4976
- [20] Mo Q. A sharp restricted isometry constant bound of orthogonal matching pursuit. *Mathematics*, 2015, **2**: 249–262
- [21] Wen J, Zhou Z, Wang J, et al. A sharp condition for exact support recovery with orthogonal matching pursuit. *IEEE Trans Signal Processing*, 2017, **65**(6): 1370–1382
- [22] 叶丽颖, 李静, 王金平. 具均匀衰减投影数据下发射型 SPECT 图像重建方法研究. *数学物理学报*, 2018, **38A**(3): 613–624
Ye L Y, Li J, Wang J P. Emission SPECT image reconstruction methods with uniformly attenuated projection data. *Acta Math Sci*, 2018, **38A**(3): 613–624

Exact Support Recovery of Sparse Signals from Noisy Measurements

Fu Min Hao Jiajun Xie Liejun Wang Jinping

(*School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Zhejiang Ningbo 315211*)

Abstract: In this paper, we presents an improved OMP algorithm. Then the sparse reconstruction problem of OMP algorithm under the influence of the noise is studied. The conditions of SNR parameters for sparse reconstruction are obtained. Finally, numerical simulation is used to verify the above conclusions.

Key words: CS OMP algorithm; Sparse reconstruction; Signal-to-Noise Ratio.

MR(2010) Subject Classification: 34A08; 65R10; 44A15