2021,**41A**(5):1405–1414

数学物理学报 Acta Mathematica Scientia

http://actams.wipm.ac.cn

系数的 L^1 相互关系对非线性退化椭圆方程解的正则性的影响

邹维林 * 任远春 肖美萍

(南昌航空大学数学与信息科学学院 南昌 330063)

摘要：该文主要研究一类非线性退化椭圆型方程 $-\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u))+b(x)g(u)+B(x,u,\nabla u)=f(x)$, 其中方程的主算子在 $\{u=0\}$ 处退化. 即使当 f 仅属于 L^1 时，证明了有界弱解的存在性，这在某种程度上推广了以往的结果.

关键词：退化椭圆型方程； L^1 系数；有界弱解；正则性影响.

MR(2010) 主题分类：35D30; 35J66; 35J70 **中图分类号**：O175.2 **文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2021)05-1405-10

1 引言

该文在有界开集 $\Omega\in\mathbb{R}^N(N\geq 2)$ 中，考虑下列非线性退化椭圆方程边值问题系数间的相互作用关系对解的正则性的影响

$$
(\mathrm{P})\quad \begin{cases}-\mathrm{div}(\alpha(u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+b(x)g(u)+\beta(u)|\nabla u|^p=f(x), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}
$$

其中 $f(x),b(x)\in L^1(\Omega)$, $1<p\leq N$, 且 g 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. α,β 为 $\mathbb{R}$ 上的非负连续函数，满足 $\alpha(0)=0$, 且当 $s\neq 0$ 时有 $\alpha(s)>0$. 因此，问题 (P) 在子集 $\{x\in\Omega:u(x)=0\}$ 上退化.

上述问题在物理和其它科学领域有着重要和广泛的应用，参见文献 [1–10]. 考虑特殊情况 $\alpha(s)=s^m$ 以及 $\beta(s)\equiv 0$, 此方程为多孔介质方程的稳态情形；例如 Li[6] 得到了稳态模型的结果， Yin 等 [7] 和 Wu 等 [8] 研究了带吸收项的多孔介质方程， Liu 等 [9] 和 Li 等 [10] 研究了非局部多孔介质方程， Wang 等 [11] 考虑了多孔介质方程的混合边值问题.

若 α 为正值函数， $p=2$ 且 $b\equiv 0$, 在经典的假设条件 $f\in L^q(\Omega)(q>\frac{N}{2})$ 下，文献 [12] 证明了有界弱解的存在性. 注意到相应抛物问题的结果可参见文献 [13]. 当 f 满足相同的假

收稿日期: 2020-07-16; 修订日期: 2021-03-23

E-mail: zwl267@163.com; 320029374@qq.com; 59653147@qq.com

基金项目：国家自然科学基金 (11801259, 11461048) 、江西省自然科学基金 (20202BABL201009) 和江西省教育厅科技项目 (GJJ170604)

Supported by the NSFC(11801259, 11461048), the NSF of Jiangxi Province(20202BABL201009) and the Education Department of Jiangxi Province(GJJ170604)

* 通讯作者

设条件，并假定 $\alpha(0)=0$ 和 $\int_0^{+\infty}\alpha^{\frac{1}{p-1}}(s)\mathrm{d}s=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha(s)}\mathrm{d}s=+\infty$, 文献 [2] 证明了类似的结果.

若 $\alpha\equiv$ 常数 >0 且 $p=2$, 众所周知如果 $b\equiv 0$ 和 $f\in L^1(\Omega)$, 一般是不能得到问题 (P) 的有界弱解 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 的存在性．而且当 $b\equiv 0$ 时，即使 $f\in L^q(\Omega)$ $(q>\frac{N}{2})$, 为了得到有界弱解的存在性，还需要 f 满足适当小的条件，参见文献 [14]. 出乎意料的是，如果 $g(u)=u$ 且 $b,f\in L^1$ 条件满足 (2.7) 式，文献 [15] 证明了非退化问题 (P) 至少存在一个弱解 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, 这意味着系数 $b(x)$ 与 f 之间的相互关系对解的正则性有一定的影响．最近， Arcoya 和 Boccardo[16] 研究了系数 $b,f\in L^1$ 之间更为一般地相互关系，即 $|f(x)|\leq Qb(x)+R(x)$, 其中 $R(x)\in L^m(\Omega)$. 相应的抛物方程边值问题的结果参见文献 [17]. 关于具一般低阶项和 L^1 数据的拟线性椭圆问题无界解的存在性结果，参见文献 [18]. 含有低阶项或不含低阶项的类似问题的研究结果，参见文献 [19–21].

受文献 [12, 15] 的启发，该文主要研究退化问题 (P) 的系数 $b(x),f(x)\in L^1(\Omega)$ 的 L^1 相互关系对解的正则性的影响机制．即使仅满足条件 $f\in L^1(\Omega)$ 时，证明问题 (P) 的有界弱解的存在性，一定程度上推广了文献 [2, 12, 15, 19] 的结果 (见注 2.2).

该文后面的内容作如下安排：在第 2 节中给出假设条件与主要结果；最后在第 3 节中，给出主要结果的证明.

2 假设条件与主要结果

本节将给出问题的主要假设条件．本文主要研究下列非线性退化椭圆型方程

$$(\mathrm{P})\quad \begin{cases}-\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u))+b(x)g(u)+B(x,u,\nabla u)=f(x), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

其中 Ω 为 $\mathbb{R}^N$ $(N\geq 2)$ 中的有界开集, $1<p\leq N$. 假设 $a:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ 为 Carathéodory 函数，使得对任意的 $\xi,\zeta(\xi\neq\zeta)\in\mathbb{R}^N$, $s\in\mathbb{R}$ 以及几乎处处的 $x\in\Omega$, 有

$$a(x,s,\xi)\cdot\xi\geq\alpha(s)|\xi|^p, \tag{2.1}$$

$$|a(x,s,\xi)|\leq\Lambda\alpha(s)[|\xi|^{p-1}+j(x)], \tag{2.2}$$

$$[a(x,s,\xi)-a(x,s,\zeta)]\cdot[\xi-\zeta]>0,\quad \forall s\neq 0, \tag{2.3}$$

其中 Λ 为正常数， $j\in L^{p'}(\Omega)$, 函数 α 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的非负连续函数满足 $\alpha(0)=0$, 且当 $s\neq 0$ 有 $\alpha(s)>0$. 假定 $B:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ 为 Carathéodory 函数，使得对几乎处处的 $x\in\Omega$ 以及任意的 $(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, 有

$$|B(x,s,\xi)|\leq\beta(s)|\xi|^p, \tag{2.4}$$

其中 β 为连续非负函数满足

$$\frac{\beta}{\alpha}\in L^1_{loc}(\mathbb{R}). \tag{2.5}$$

零阶项的系数 $b(x)$ 与 $f(x)$ 满足

$$f(x),b(x)\in L^1(\Omega), \tag{2.6}$$

且存在常数 $M>0$ 使得对几乎处处的 $x\in\Omega$, 有

$$|f(x)|\leq Mb(x). \tag{2.7}$$

连续函数 $g(s)$ 满足

$$\lim_{s\to-\infty} g(s)=-\infty \qquad \text{和} \qquad \lim_{s\to+\infty} g(s)=+\infty. \tag{2.8}$$

定义

$$A(s)=\int_0^s \alpha^{\frac{1}{p-1}}(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

下面给出问题 (P) 的弱解的定义.

定义 2.1　可测函数 u 称为问题 (P) 的弱解，若 $A(u)\in W_0^{1,p}(\Omega)$, $a(x,u,\nabla u)\in L^{p'}(\Omega)$, $B(x,u,\nabla u)\in L^1(\Omega)$ 且 $b(x)g(u)\in L^1(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\mathrm{d}x+\int_\Omega b(x)g(u)v\mathrm{d}x+\int_\Omega B(x,u,\nabla u)v\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x, \tag{2.9}$$

对任意 $v\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 都成立.

下面给出本文的主要结果.

定理 2.1　假设 (2.1)–(2.8) 式成立，则问题 (P) 至少存在一个弱解 $u\in L^\infty(\Omega)$.

注 2.1　当 u 充分大时,满足条件 (2.1)–(2.3) 的主算子也可能为非强制的,如 $a(x,u,\nabla u)=\frac{|u|^m}{1+|u|^r}|\nabla u|^{p-2}\nabla u$. 因此，对于具有退化非强制的椭圆问题 (P), 定理 2.1 的结果仍然成立.

注 2.2　对比文献 [2] 的结果，定理 2.1 不需要假定 a 满足 $p-1$ 次的齐次条件. 而且，为得到有界弱解的存在性，低阶项 B 不需要满足符号条件. 与文献 [2, 12, 19] 的结果不同，只需假设 $f\in L^1(\Omega)$. 最后，由定理 2.1 的证明过程可知，本文的结果同时也包含了文献 [15] 的结果.

3　主要结果的证明

在证明主要结论之前，对一些重要记号做出说明. 由于 $\alpha(0)=0$ 导致问题在解 $u=0$ 处退化，为克服此困难，下面定义两个在原点附近的截断函数

$$\tilde{T}_\theta(s)=\max\{s,\theta\}, \qquad \hat{T}_\theta(s)=\min\{s,-\theta\}, \ \text{对任意给定 } \theta>0. \tag{3.1}$$

同时，定义截断函数 $T_\theta(s)=\max\{-\theta,\min\{\theta,s\}\}$ 以及 $G_\theta(s)=s-T_\theta(s)$.

另外，本节还需要用到下列逼近函数

$$\tilde{\phi}_\theta(s)=\int_0^s \frac{\beta(\tilde{T}_\theta(T_n(\sigma)))}{\alpha(\tilde{T}_\theta(T_n(\sigma)))}\mathrm{d}\sigma, \quad \hat{\phi}_\theta(s)=\int_0^s \frac{\beta(\hat{T}_\theta(T_n(\sigma)))}{\alpha(\hat{T}_\theta(T_n(\sigma)))}\mathrm{d}\sigma, \tag{3.2}$$

$$f_n(x)=\frac{f(x)}{1+\frac{1}{n}|f(x)|}, \qquad b_n(x)=\frac{b(x)}{1+\frac{M}{n}|b(x)|}, \quad B_n(x,s,\xi)=\frac{B(x,s,\xi)}{1+\frac{1}{n}|B(x,s,\xi)|}. \tag{3.3}$$

为证明定理 2.1, 考虑下列逼近问题

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x,T_n(u_n),\nabla u_n)\cdot\nabla v\mathrm{d}x+\frac{1}{n}\int_\Omega|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla v\mathrm{d}x+\int_\Omega b_n(x)g(T_n(u_n))v\mathrm{d}x\\&+\int_\Omega B_n(x,T_n(u_n),\nabla u_n)v\mathrm{d}x=\int_\Omega f_n(x)v\mathrm{d}x, \quad \forall v\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega).\end{aligned} \tag{3.4}$$

由经典结论可知 [23], 问题 (3.4) 至少存在一个弱解 $u_n\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.

定理 2.1 的证明 证明过程分为六个步骤.

步骤 1 证明 $\{u_n\}$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 一致有界.

根据 (2.8) 式可知存在正整数 $l>0$ 使得对 $|s|\geq l$ 有

$$g(s)s\geq 0 \ \text{和}\ |g(s)|\geq M. \tag{3.5}$$

在 (3.4) 式中取检验函数 $v=\tilde{v}_\theta=e^{\tilde{\phi}_\theta(u_n)}(e^{G_l(u_n^+)}-1)$. 利用 (2.1), (2.4) 式，并在等式左边去掉一些非负项，可得

$$\begin{aligned}&\int_{\{x\in\Omega:u_n(x)\geq l\}}\tilde{v}_\theta\frac{\beta(\tilde{T}_\theta(T_n(u_n)))}{\alpha(\tilde{T}_\theta(T_n(u_n)))}\alpha(T_n(u_n))|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{n}\int_\Omega\tilde{v}_\theta|\nabla G_l(u_n^+)|^p\mathrm{d}x+\int_\Omega b_n(x)g(T_n(u_n))\tilde{v}_\theta\mathrm{d}x\\\leq&\int_{\{x\in\Omega:u_n(x)\geq l\}}\beta(T_n(u_n))|\nabla u_n|^p\tilde{v}_\theta\mathrm{d}x+\int_\Omega|f_n(x)|\tilde{v}_\theta\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.6}$$

从 (2.7), (3.3) 和 (3.5) 式可以得到对 $n>l$ 有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega b_n(x)g(T_n(u_n))\tilde{v}_\theta\mathrm{d}x-\int_\Omega|f_n(x)|\tilde{v}_\theta\mathrm{d}x\\\geq&\int_{\{x\in\Omega:u_n(x)\geq l\}}Mb_n(x)\tilde{v}_\theta\mathrm{d}x-\int_{\{u_n\geq l\}}\frac{Mb(x)}{1+\frac{M}{n}b(x)}\tilde{v}_\theta\mathrm{d}x=0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

注意到对几乎处处的 $x\in\{x\in\Omega:u_n(x)\geq l\}$, 有

$$\tilde{T}_\theta(T_n(u_n))=T_n(u_n),$$

再利用 (3.6) 与 (3.7) 式，可知当 $n>l$ 时下式成立

$$\frac{1}{n}\int_\Omega\tilde{v}_\theta|\nabla G_l(u_n^+)|^p\mathrm{d}x\leq 0. \tag{3.8}$$

类似地，在 (3.4) 式中取 $v=\hat{v}_\theta=-e^{-\hat{\phi}_\theta(u_n)}(e^{-G_l(u_n^-)}-1)$ 为检验函数，可推导出 $n>l$ 时下列估计成立

$$\frac{1}{n}\int_\Omega|\hat{v}_\theta||\nabla G_l(u_n^-)|^p\mathrm{d}x\leq 0.$$

再结合 (3.8) 式，可得对任意的正整数 n 有

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)}\leq l_0, \tag{3.9}$$

其中 $l_0=\max\{\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)},\|u_2\|_{L^\infty(\Omega)},\cdots\|u_l\|_{L^\infty(\Omega)},l\}$.

步骤 2 建立关于 $\nabla A(u_n)$, ∇u_n 和 $B(x,u_n,\nabla u_n)$ 的估计.

$\int_\Omega|\nabla A(u_n)|^p\mathrm{d}x$ 的估计. 定义

$$\phi_\varepsilon(s)=\int_0^s\frac{\beta(\sigma)}{\alpha(\sigma)+\varepsilon}\mathrm{d}\sigma,\quad \phi(s)=\int_0^s\frac{\beta(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\mathrm{d}\sigma,$$

并在 (3.4) 式中取 $v=e^{|\phi_\varepsilon(u_n)|}A(u_n)$ 为检验函数，从 (2.1), (2.4), (2.7) 和 (3.9) 式可推出对 $n>l_0$ 有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{e^{|\phi_\varepsilon(u_n)|}\beta(u_n)}{\alpha(u_n)+\varepsilon}\alpha(u_n)|\nabla u_n|^p|A(u_n)|\mathrm{d}x+\int_\Omega e^{|\phi_\varepsilon(u_n)|}A'(u_n)\alpha(u_n)|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{n}\int_\Omega e^{|\phi_\varepsilon(u_n)|}A'(u_n)|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x\\ \leq&\int_\Omega e^{|\phi_\varepsilon(u_n)|}\beta(u_n)|\nabla u_n|^p|A(u_n)|\mathrm{d}x+\int_\Omega e^{|\phi_\varepsilon(u_n)|}|A(u_n)|\left[b(x)\sup_{s\in[-l_0,\ l_0]}|g(s)|+|f(x)|\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

上式中令 $\varepsilon\to 0$, 可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|\nabla A(u_n)|^p\mathrm{d}x\\ \leq&\max\left\{A(l_0)e^{\phi(l_0)},-A(-l_0)e^{-\phi(-l_0)}\right\}\left[\sup_{s\in[-l_0,\ l_0]}|g(s)|\|b\|_{L^1(\Omega)}+\|f\|_{L^1(\Omega)}\right].\end{aligned}\tag{3.10}$$

$\frac{1}{n}\int_\Omega|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x$ 的估计．在 (3.4) 式中取 $v=e^{|\phi_\varepsilon(u_n)|}u_n$ 为检验函数，类似于 (3.10) 式的证明，可推出对 $n>l_0$ 有

$$\frac{1}{n}\int_\Omega|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x\leq l_0\max\left\{e^{\phi(l_0)},e^{-\phi(-l_0)}\right\}\left[\sup_{s\in[-l_0,\ l_0]}|g(s)|\|b\|_{L^1(\Omega)}+\|f\|_{L^1(\Omega)}\right].\tag{3.11}$$

$\int_\Omega|B(x,u_n,\nabla u_n)|\mathrm{d}x$ 的估计．在 (3.4) 式中取 $v=e^{|\phi_\varepsilon(u_n)|}(1-e^{-|\phi_\varepsilon(u_n)|})\mathrm{sign}\ u_n$ 为检验函数，利用 (2.1), (2.4), (2.7) 和 (3.9) 式，并舍去 (3.4) 式左端的一些非负项可得对 $n>l_0$ 有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\frac{\beta(u_n)}{\alpha(u_n)+\varepsilon}\alpha(u_n)|\nabla u_n|^p|\bar v_\varepsilon|\mathrm{d}x+\int_\Omega\frac{\beta(u_n)}{\alpha(u_n)+\varepsilon}\alpha(u_n)|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x\\ \leq&\int_\Omega\beta(u_n)|\nabla u_n|^p|\bar v_\varepsilon|\mathrm{d}x+C_0,\end{aligned}$$

其中

$$C_0=\left[\max\{e^{\phi(l_0)},e^{-\phi(-l_0)}\}-1\right]\left[\sup_{s\in[-l_0,\ l_0]}|g(s)|\|b\|_{L^1(\Omega)}+\|f\|_{L^1(\Omega)}\right].$$

然后令 $\varepsilon\to 0$, 由 (2.4) 和 (3.9) 式可推出

$$\int_\Omega|B(x,u_n,\nabla u_n)|\mathrm{d}x\leq\textstyle\int_\Omega\beta(u_n)|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x\leq C_0.\tag{3.12}$$

步骤 3　根据 (3.9) 和 (3.10) 式可知，存在 $\{u_n\}$ 的子列 (仍然记为 $\{u_n\}$) 以及函数 $w\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, 使得 $A(u_n)$ 几乎处处收敛于 w, 并且在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中弱收敛于 w. 注意到 A 为严格单调递增函数，从而可知存在可测函数 $u=A^{-1}(w)\in L^\infty(\Omega)$ 使得

$$A(u_n)\rightharpoonup A(u)\ \text{ 在 }\ W_0^{1,p}(\Omega)\text{ 中弱收敛},\quad \text{且在 } L^\infty(\Omega)\ \text{ 中弱}*\text{收敛},\tag{3.13}$$

同时有

$$u_n\to u\ \text{ a.e. 在 }\ \Omega\text{ 中 且 }\ \tilde T_\theta(u_n)\rightharpoonup\tilde T_\theta(u)\ \text{ 在 }\ W_0^{1,p}(\Omega)\text{ 中弱收敛}.\tag{3.14}$$

在 (3.4) 式中取 $e^{\phi_\varepsilon(u_n)}\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+$ 为检验函数. 利用 (2.1) 和 (2.4) 式, 并舍去一些非负项, 然后令 $\varepsilon\to 0$, 可推得对 $n>l_0$ 有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega e^{\phi(u_n)}a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{n}\int_\Omega e^{\phi(u_n)}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x\\\le&\int_\Omega b_n(x)g(u_n)e^{\phi(u_n)}\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x+\int_\Omega f_n(x)e^{\phi(u_n)}\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{3.15}$$

接下来分析 (3.15) 式的每一项.

由 (3.9), (3.11) 和 (3.14) 式, 并利用 Hölder 不等式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_\Omega e^{\phi(u_n)}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x=0.\tag{3.16}$$

利用 (2.7), (3.5), (3.9), (3.14) 式以及 Lebesgue 控制收敛定理, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left[b_n(x)g(u_n)e^{\phi(u_n)}\big(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\big)^++f_n(x)e^{\phi(u_n)}\big(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\big)^+\right]\mathrm{d}x=0.\tag{3.17}$$

将 (3.15) 式的第一项分解为

$$\begin{aligned}&\int_\Omega e^{\phi(u_n)}a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x\\=&\int_{\Omega_{n1}^\theta}e^{\phi(u_n)}a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla\left(u_n-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x\\&+\int_{\Omega_{n2}^\theta}e^{\phi(u_n)}a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla\left(\theta-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x\\=&\bar{J}_{11}(n,\theta)+\bar{J}_{12}(n,\theta),\end{aligned}\tag{3.18}$$

其中 $\Omega_{n1}^\theta=\{x\in\Omega:u_n(x)\ge\theta\}$, $\Omega_{n2}^\theta=\{x\in\Omega:u_n(x)<\theta\}$.

接下来, 分别估计 $\bar{J}_{11}(n,\theta)$ 和 $\bar{J}_{12}(n,\theta)$. 由于在 Ω_{n1}^θ 中有 $\tilde{T}_\theta(u_n)=u_n$, 且对几乎处处的 $x\in\Omega$ 有 $a(x,s,0)=0$, 可得到

$$\begin{aligned}\bar{J}_{11}(n,\theta)=&\int_\Omega e^{\phi(u_n)}a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u_n))\cdot\nabla\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x\\=&\int_\Omega e^{\phi(u_n)}\left[a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u_n))-a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u))\right]\cdot\nabla\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x\\&+\int_\Omega e^{\phi(u_n)}a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u))\cdot\nabla\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{3.19}$$

结合 (3.9) 与 (3.12)–(3.14) 和 (2.2) 式, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega e^{\phi(u_n)}a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u))\cdot\nabla\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x=0.$$

上式与 (3.19) 式意味着

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\bar{J}_{11}(n,\theta)\\\ge&\lim_{n\to\infty}\int_\Omega e^{\phi(u_n)}\left[a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u_n))-a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u))\right]\cdot\nabla\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对于 $\bar{J}_{12}(n,\varepsilon)$, 应用 (2.2), (3.9), (3.10) 和 (3.14) 式可推出

$$\lim_{n\to\infty}\bar{J}_{12}(n,\theta)=0.$$

再结合 $\bar{J}_{11}$ 的收敛结果，可得到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_\Omega e^{\phi(u_n)}a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x\\ \geq{}&\lim_{n\to\infty}\int_\Omega e^{\phi(u_n)}\left[a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u_n))-a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u))\right]\cdot\nabla\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

将这个结果与 (2.5), (3.9) 和 (3.16)–(3.17) 式代入 (3.15) 式，可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left[a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u_n))-a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u))\right]\cdot\nabla\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^+\mathrm{d}x\leq 0. \tag{3.20}$$

接下来，在 (3.4) 式中取 $-e^{\phi_\varepsilon(u_n)}\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^-$ 为检验函数，类似于 (3.20) 式的证明可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega-\left[a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u_n))-a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u))\right]\cdot\nabla\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)^-\mathrm{d}x\leq 0. \tag{3.21}$$

从 (3.20) 和 (3.21) 式，可推出

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left[a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u_n))-a(x,\tilde{T}_\theta(u_n),\nabla\tilde{T}_\theta(u))\right]\cdot\nabla\left(\tilde{T}_\theta(u_n)-\tilde{T}_\theta(u)\right)\mathrm{d}x\leq 0. \tag{3.22}$$

然后利用 (3.1), (3.14) 式和文献 [24] 中的引理 5, 可得到

$$\nabla\tilde{T}_\theta(u_n)\to\nabla\tilde{T}_\theta(u)\quad\text{a.e. 在 }\Omega\text{ 中，且在}(L^p(\Omega))^N\text{ 中强收敛.} \tag{3.23}$$

类似地，分别取 $e^{\phi_\varepsilon(u_n)}[\hat{T}_\theta(u_n)-\hat{T}_\theta(u)]^+$ 和 $e^{\phi_\varepsilon(u_n)}[\hat{T}_\theta(u_n)-\hat{T}_\theta(u)]^-$ 为检验函数，可推得

$$\nabla\hat{T}_\theta(u_n)\to\nabla\hat{T}_\theta(u)\quad\text{a.e. 在 }\Omega\text{ 中，且在}(L^p(\Omega))^N\text{ 中强收敛.} \tag{3.24}$$

由 (3.23) 和 (3.24) 式，可推断当 $n\to\infty$ 时，有下列结论成立：

$$\chi_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|\geq\theta\}}\nabla u_n\to\chi_{\{x\in\Omega:|u(x)|\geq\theta\}}\nabla u\quad\text{a.e. 在 }\Omega\text{ 中，且在}(L^p(\Omega))^N\text{ 中强收敛.} \tag{3.25}$$

步骤 4　下面证明收敛性结果：

$$a(x,u_n,\nabla u_n)\rightharpoonup a(x,u,\nabla u)\ \ \text{在}(L^{p'}(\Omega))^N\text{ 中弱收敛.} \tag{3.26}$$

事实上，对任意 $w\in(L^p(\Omega))^N$ 有

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot w\mathrm{d}x={}&\int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|\geq\theta\}}a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot w\mathrm{d}x\\&+\int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|<\theta\}}a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot w\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.27}$$

由 Vitali 收敛定理，(3.14) 和 (3.25) 式，可推出当 $n\to\infty$ 时有

$$a(x,u_n,\nabla u_n)\chi_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|\geq\theta\}}\to a(x,u,\nabla u)\chi_{\{x\in\Omega:|u(x)|\geq\theta\}}\ \text{在}(L^p(\Omega))^N\text{ 中强收敛.}$$

结合上式与 (2.2) 和 (3.13) 式，可得

$$\lim_{\theta\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|\geq\theta\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot w\mathrm{d}x=\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot w\mathrm{d}x. \tag{3.28}$$

在 (3.4) 式中取 $v=v_\varepsilon=e^{|\phi_\varepsilon(u_n)|}A(T_\theta(u_n))$ 为检验函数，类似于 (3.10) 式的证明可得到

$$\begin{aligned}&\int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|<\theta\}}|\nabla A(u_n)|^p\mathrm{d}x\\ \leq&\max\{A(\theta)e^{\phi(\theta)},-A(-\theta)e^{-\phi(-\theta)}\}\left[\|b\|_{L^1(\Omega)}\sup_{s\in[-\theta,\theta]}|g(s)|+\|f\|_{L^1(\Omega)}\right],\end{aligned}$$

这蕴含着

$$\lim_{\theta\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|<\theta\}}|\nabla A(u_n)|^p\mathrm{d}x\leq 0. \tag{3.29}$$

利用 Hölder 不等式和 (2.2) 式，可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|<\theta\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot w\mathrm{d}x\right|\\ \leq& C_0\left[\left(\int_\Omega|\nabla A(u_n)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}+\sup_{s\in[-\theta,\theta]}\alpha(s)\|j\|_{L^{p'}(\Omega)}\right]\left(\int_\Omega|w|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

由上式与 (3.29) 式可知

$$\lim_{\theta\to 0}\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|<\theta\}} a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot w\mathrm{d}x\right|\leq 0. \tag{3.30}$$

因此，将 (3.28) 和 (3.30) 式代入 (3.27) 式得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot w\mathrm{d}x=\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot w\mathrm{d}x. \tag{3.31}$$

再结合 (3.13) 和 (2.2) 式，可知 (3.26) 式成立.

步骤 5 接下来证明下列收敛结果成立:

$$B(x,u_n,\nabla u_n)\to B(x,u,\nabla u)\ \ \text{在}L^1(\Omega)\ \text{中弱收敛}. \tag{3.32}$$

事实上，对任意 $\vartheta\in L^\infty(\Omega)$ 与 $\theta>0$ 有，

$$\begin{aligned}&\int_\Omega B(x,u_n,\nabla u_n)\vartheta\mathrm{d}x\\ =&\int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|\geq\theta\}}B(x,u_n,\nabla u_n)\vartheta\mathrm{d}x+\int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|<\theta\}}B(x,u_n,\nabla u_n)\vartheta\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.33}$$

利用 (3.12)–(3.14), (3.25) 式与 Vitali 收敛定理，仿照 (3.28) 式的证明过程可推得

$$\lim_{\theta\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|\geq\theta\}}B(x,u_n,\nabla u_n)\vartheta\mathrm{d}x=\int_\Omega B(x,u,\nabla u)\vartheta\mathrm{d}x. \tag{3.34}$$

然后在 (3.4) 式中取 $v=e^{|\phi_\varepsilon(u_n)|}(1-e^{-|\phi_\varepsilon(T_\theta(u_n))|})\mathrm{sign}\, u_n$ 为检验函数，仿照 (3.12) 式的证明可得到

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|<\theta\}}B(x,u_n,\nabla u_n)\vartheta\mathrm{d}x\right|\le\|\vartheta\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|<\theta\}}\beta(u_n)|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x\\ \le{}&\|\vartheta\|_{L^\infty(\Omega)}e^{\max\{\phi(l_0),-\phi(-l_0)\}}[1-e^{-\max\{\phi(\theta),-\phi(-\theta)\}}]\int_\Omega[b(x)\sup_{s\in[-l_0,l_0]}|g(s)|+|f(x)|]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这意味着

$$\lim_{\theta\to0}\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\{x\in\Omega:|u_n(x)|<\theta\}}B(x,u_n,\nabla u_n)\vartheta\mathrm{d}x\right|\le0. \tag{3.35}$$

从而，由 (3.33)–(3.35) 式进一步可得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega B(x,u_n,\nabla u_n)\vartheta\mathrm{d}x=\int_\Omega B(x,u,\nabla u)\vartheta\mathrm{d}x.$$

联合上式与 (3.12) 式，可推得 (3.32) 式成立.

步骤 6 结束证明　利用 (3.11) 式和 Hölder 不等式，可知

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\int_\Omega|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla v\mathrm{d}x\right|\le0,\quad\forall v\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.36}$$

然后在 (3.4) 式中令 $n\to\infty$, 联合 (3.3), (3.9) (3.13), (3.14), (3.26), (3.32) 和 (3.36) 式，可推得 u 为问题 (P) 的弱解. 因此，定理 2.1 证毕.

参 考 文 献

[1] Fabrie P, Gallouët T. Modelling wells in porous media flows. Math Models Methods Appl Sci, 2000, **10**: 673–709

[2] Rakotoson J M. Existence of bounded of some degenerate quasilinear elliptic equations. Comm Partial Differential Equations, 1987, **12**(6): 633–676

[3] Giachetti D, Maroscia G. Existence results for a class of porous medium type equations with a quadratic gradient term. J Evol Equ, 2008, **8**: 155–188

[4] Fang Z, Li G. Extinction and decay estimates of solutions for a class of doubly degenerate equations. Applied Mathematics Letters, 2012, **25**(11): 1795–1802

[5] Vázquez J L. The Porous Medium Equation. Mathematical Theory. Oxford: Oxford Univ Press, 2007

[6] Li F Q. Some nonlinear elliptic systems with right-hand side integrable data with respect to the distance to the boundary. Science China Mathematics, 2014, **57**(9): 1891–1910

[7] Yin J X, Wang L W, Huang R. Complexity of asymptotic behavior of solutions for the porous medium equation with absorption. Acta Mathematica Scientia, 2010, **30B**(6): 1865–1880

[8] Wu X L, Gao W J. Blow-up of the Solution for a class of porous medium equation with positive initial energy. Acta Math Sci, 2013, **33B**(4): 1024–1030

[9] Liu D M, Mu C L, Xin Q. Lower bounds estimate for the blow-up time of a nonlinear nonlocal porous medium equation. Acta Math Sci, 2012, **32B**(3): 1206–1212

[10] Li F C, Xie C H. Global existence and blow-up for a nonlinear porous medium equation. Appl Math Lett, 2003, **16**: 185–192

[11] Wang J, Wang Z J, Yin J X. A class of degenerate diffusion equations with mixed boundary conditions. J Math Anal Appl, 2004, **298**(2): 589–603

[12] Boccardo L, Segura de León S, Trombettic C. Bounded and unbounded solutions for a class of quasi-linear elliptic problems with a quadratic gradient term. J Math Pures Appl, 2001, **80**(9): 919–940

[13] Dall'Aglio A, Giachetti D, Leone C, León S. Quasi-linear parabolic equations with degenerate coercivity having a quadratic gradient term. Ann Inst H Poincaré Anal Nonlinéaire, 2006, **23**: 97–126
[14] Ferone V, Posteraro M R, Rakotoson J M. L^∞-estimates for nonlinear elliptic problems with p-growth in the gradient. J Inequal Appl, 1999, **3**(2): 109–125
[15] Arcoya D, Boccardo L. Regularizing effect of the interplay between coefficients in some elliptic equations. J Funct Anal, 2015, **268**(5): 1153–1166
[16] Arcoya D, Boccardo L. Regularizing effect of L^q interplay between coefficients in some elliptic equations. J Math Pures Appl, 2018, **111**: 106–125
[17] Li Z Q. Existence result to a parabolic equation with quadratic gradient term and an L^1 source. Acta Applicandae Mathematicae, 2019, **163**(1): 145–156
[18] Moreno M L. A quasilinear Dirichlet problem with quadratic growth respect to the gradient and L^1 data. Nonlinear Anal, 2014, **95**: 450–459
[19] Alvino A, Boccardo L, Ferone V, et al. Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity. Ann Mat Pura Appl, 2003, **182**(4): 53–79
[20] Zheng J, Tavares L S. The obstacle problem for nonlinear noncoercive elliptic equations with L^1-data. Journal of Inequalities and Applications, 2019, **205**: 1–15
[21] Chlebicka I. Regularizing effect of the lower-order terms in elliptic problems with Orlicz growth. 2019, arXiv:1902.05314
[22] 李仲庆，高文杰．一类具低阶项和退化强制的椭圆方程的有界弱解．数学物理学报， 2019, **39A**(3): 529–534
Li Z Q, Gao W J. Bounded weak solutions to an elliptic equation with lower order terms and degenerate coercivity. Acta Math Sci, 2019, **39A**(3): 529–534
[23] Lions J L. Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Nonlinéaires. Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969
[24] Boccardo L, Murat F, Puel J P. Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic unilateral problems. Ann Mat Pura Appl, 1988, **152**(4): 183–196

Regularizing Effect of L^1 Interplay Between Coefficients in Nonlinear Degenerate Elliptic Equations

Zou Weilin Ren Yuanchun Xiao Meipin
(*College of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063*)

Abstract: In this paper, we consider a class of nonlinear degenerate elliptic equations of the form $-\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) + b(x)g(u) + B(x,u,\nabla u) = f(x)$, where the principal part degenerates on $\{u = 0\}$. Even if f only belongs to $L^1(\Omega)$, the existence of bounded weak solutions are proven. This generalizes, to some extent, previous results.

Key words: Degenerate elliptic equations; L^1 coefficients; Bounded weak solutions; Regularizing effect.

MR(2010) Subject Classification: 35D30; 35J66; 35J70