2021,**41A**(5):1382–1395

http://actams.wipm.ac.cn

数学物理学报 Acta Mathematica Scientia

带非线性扩散项和信号产生项的趋化 - 趋触模型解的整体有界性

[1] 贾哲 [2,3] 杨作东*

([1] 临沂大学数学与统计学院 山东临沂 276005; [2] 南京师范大学教师教育学院 南京 210097;
[3] 南京信息工程大学教师教育学院 南京 210044)

摘要：该文研究如下带齐次 Neumann 边界条件的趋化 — 趋触模型的初边值问题

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot(D(u)\nabla u) - \chi\nabla\cdot(\dfrac{u}{(1+u)^{\alpha}}\nabla v) - \xi\nabla\cdot(\dfrac{u}{(1+u)^{\beta}}\nabla w) + u(a-\mu u^{k-1}-\lambda w), \\ v_t = \triangle v - v + u^{\gamma}, \qquad x\in\Omega,\ t>0, \\ w_t = -vw, \qquad x\in\Omega,\ t>0, \end{cases}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为有界域，$\chi,\xi,\mu,\lambda,\gamma>0$, $k>1$, $a\in\mathbb{R}$, 且 $D(u)\geq C_D(u+1)^{m-1}$, 其中 $C_D>0, m\in\mathbb{R}$. 主要结论如下

(i) 当 $0<\gamma\leq\frac{2}{3}$ 时，若 $\alpha>\gamma-k+1$ 并且 $\beta>1-k$, 上述模型存在整体有界的古典解.

(ii) 当 $\frac{2}{3}<\gamma\leq 1$ 时，若 $\alpha>\gamma-k+\frac{1}{e}+1$ 并且

$$\beta>\max\{\frac{(3\gamma-2)(3\gamma+2k-2)}{6}-k+1, \frac{(3\gamma-2)(\gamma+\frac{1}{e})}{3}-k+1\},$$

或者 $\alpha>\gamma-k+1$ 并且

$$\beta>\max\{\frac{(3\gamma-2)(3\gamma+2k-2)}{6}-k+1, \frac{(3\gamma-2)(\alpha+k-1)}{3}-k+1\},$$

上述模型存在整体有界的古典解.

关键词：整体存在性；有界性；趋化 - 趋触；非线性扩散.

MR(2010) 主题分类：35K55; 35B35 **中图分类号**：O175.26 **文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2021)05-1382-14

收稿日期: 2020-03-24; 修订日期: 2021-04-21

E-mail: zdyang_jin@263.net

基金项目：国家自然科学基金 (11571093)、江苏省教育委员会自然科学基金 (19KJB110016) 和临沂大学科研启动基金 (LYDX2020BS014)

Supported by the NSFC(11571093), the NSF of Jiangsu Education Commission(19KJB110016) and the Scientific Research Foundation of Linyi University(LYDX2020BS014)

* 通讯作者

1 背景

本文研究如下趋化 - 趋触模型

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot(D(u)\nabla u) - \nabla\cdot(H(u)\nabla v) - \nabla\cdot(S(u)\nabla w) + u(a - \mu u^{k-1} - \lambda w), \\ v_t = \triangle v - v + g(u), & x\in\Omega,\ t>0, \\ w_t = -vw, & x\in\Omega,\ t>0, \\ D(u)\dfrac{\partial u}{\partial\nu} - H(u)\dfrac{\partial v}{\partial\nu} - S(u)\dfrac{\partial w}{\partial\nu} = \dfrac{\partial v}{\partial\nu} = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x),\ w(x,0)=w_0(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

古典解的整体存在性和有界性. 其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是带光滑边界的有界域, 函数 u,v,w 分别代表癌细胞密度、基质降解酶浓度和细胞外基质浓度. $D(u),H(u),S(u),g(u)$ 分别代表肿瘤细胞通过细胞外基质的密度依赖性运动、趋化敏感项、趋触敏感项和非线性信号产生项. 在本文中假设 $D,H,S\in C^2([0,\infty))$ 满足如下条件

$$D(s)\geq C_D(s+1)^{m-1},\ \ \forall\ s\geq 0, \tag{1.2}$$

$$0\leq H(s)\leq \chi s(s+1)^{-\alpha},\ \forall\ s\geq 0 \text{ 并且 } H(0)=0, \tag{1.3}$$

$$0\leq S(s)\leq \xi s(s+1)^{-\beta},\ \forall\ s\geq 0 \text{ 并且 } S(0)=0, \tag{1.4}$$

其中 $C_D,\chi,\xi>0$ 且 $m,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. 函数 $g\in C^1([0,\infty))$ 满足

$$0\leq g(s)\leq C_g s^\gamma,\ \forall\ s\geq 0, \tag{1.5}$$

其中 $C_g,\gamma>0$. 另外, 假设初值满足

$$\begin{cases} u_0\in W^{1,\infty}(\Omega),\ u_0\geq 0, \quad x\in\Omega, \\ v_0\in W^{1,\infty}(\Omega),\ \ v_0\geq 0, \quad x\in\Omega, \\ w_0\in C^{2,\theta}(\overline{\Omega}) \text{ 其中 } \theta\in(0,1), w_0\geq 0 \text{ 在 } \Omega \text{ 上, } \dfrac{\partial w_0}{\partial\nu}=0 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \tag{1.6}$$

当 $w\equiv 0$ 时, 问题 (1.1) 化简为如下经典的 Keller–Segel 模型

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot(D(u)\nabla u) - \nabla\cdot(H(u)\nabla v) + f(u), & x\in\Omega, t>0, \\ v_t = \triangle v - v + g(u), & x\in\Omega,\ t>0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu} = \dfrac{\partial v}{\partial\nu} = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x),\ \ v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{1.7}$$

在过去的四十年里, 模型 (1.7) 已经被许多作者广泛研究. 关于该模型探讨的主要问题是解的整体存在性及爆破性质 (见文献 [1–19]). 若问题 (1.7) 中的信号产生项为线性表示 (即 $g(u)=u$) 时, 有如下结果: 当 $f(u)=0$ 并且对任意的 $u>1$ 以及 $\alpha>\frac{2}{N}$, 条件 $\frac{H(u)}{D(u)}\geq cu^\alpha$ 成立, 则问题 (1.7) 在球形区域上具有限时间或无限时间爆破的光滑解; 若对任意的 $u>1$ 以及 $\alpha<\frac{2}{N}$, 条件 $\frac{H(u)}{D(u)}\leq cu^\alpha$ 成立, Tao 和 Winkler [2] 证得问题 (1.7) 在凸区域上存在整体有界解. 不久, 该结论又被 Ishida 等 [3] 延拓到非凸性区域. 之后, Cieślak 和 Stinner[4] 找

到一个临界值 m_*, 使得当问题 (1.7) 的初始质量小于临界值 m_* 时，解是有界的，而当初始质量超过 m_* 时，解是无界的. 当 $f(u)=au-\mu u^k$ 并且 $D(u),H(u)$ 满足 (1.2), (1.3) 式时，若 $0<2-\alpha-m<\max\{k-m,\frac{2}{N}\}$ 或者 $2-\alpha=k$ 并且 μ 充分大， Zheng [5] 证得问题 (1.7) 存在整体有界的古典解. 若问题 (1.7) 中的信号产生项为非线性表示 (即 $g(u)=u^\gamma$), 则有如下结果：当 $1+\gamma-\alpha<k$ 或者 $1+\gamma-\alpha=k$ 并且 μ 充分大时， Tao 等 [6] 证明了问题 (1.7) 存在整体有界的古典解. 之后， Ding 等 [7] 得到当 $1-\alpha-m+\gamma<\frac{2}{N}$ 时，古典解整体存在并且有界. 再而他们还得到，当 logistic 阻尼足够强时，该古典解会最终收敛到常数稳态解. 另外， Zeng [20] 和 Ren 等 [21] 研究了带非线性扩散项和信号生成项的吸引 – 排斥趋化系统古典解的整体有界性和渐近行为，以及 Winkler [22] 在三维空间上讨论了带非线性扩散项和一般灵敏度的趋化 – 斯托克斯系统解的一致有界性和大时间行为.

当 $\chi=0$ 时，问题 (1.1) 被称为趋触模型，关于该模型解的整体存在性和大时间行为结果可以参考文献 [23–24]. 与趋触模型相比，趋化 – 趋触模型的结果相对较少. 而在现实情况中，基质降解酶的扩散速率远远大于癌细胞的扩散速率. Chaplain 和 Lolas [25] 提出，肿瘤细胞的运动依赖于随机扩散、趋触运动和基质降解酶的扩散梯度，并引入了下面的趋化 - 趋触模型

$$\begin{cases} u_t=\triangle u-\chi\nabla\cdot(u\nabla v)-\xi\nabla\cdot(u\nabla w)+u(a-\mu u^{k-1}-\lambda w), & x\in\Omega, t>0,\\ v_t=\triangle v-v+u, & x\in\Omega,\ t>0,\\ w_t=-vw, & x\in\Omega,\ t>0. \end{cases} \tag{1.8}$$

当 $k=2,a=\lambda=\mu$ 时， Tao, Wang[26] 和 Tao[27] 研究了 $N=1,2$ 时古典解的整体稳定性，以及 Tao[28] 研究了二维空间上解的一致有界性. 而对于 $N=3$ 的情形，若 $\frac{\mu}{\chi}$ 充分大时，可知解是整体存在并且一致有界的 [26,29], 而当 $\frac{\mu}{\chi}$ 比较小时，还没有相关结果. 最近， Zheng 和 Ke[30] 证明了当 $k>2$ 或者 $k=2$, 并且 μ 充分大时，问题 (1.8) 存在整体有界的古典解. 另外，当 μ 充分大时，问题 (1.8) 的解将指数衰减到常数稳态解 $((\frac{a}{\mu})^{\frac{1}{k-1}},(\frac{a}{\mu})^{\frac{1}{k-1}},0)$.

最近几年，许多学者开始研究带非线性扩散项的趋化 - 趋触模型，如下

$$\begin{cases} u_t=\nabla\cdot(D(u)\nabla u)-\chi\nabla\cdot(u\nabla v)-\xi\nabla\cdot(u\nabla w)+\mu u(1-u-w), & x\in\Omega, t>0,\\ v_t=\triangle v-v+u, & x\in\Omega,\ t>0,\\ w_t=-vw, & x\in\Omega,\ t>0, \end{cases} \tag{1.9}$$

其中 $D(u)$ 满足对任意的 $u>0$, $D(u)\geq C_D(u+1)^{m-1}$ 成立. Tao 和 Winkler[31] 得到当 $N\leq 8$ 并且 $m>\frac{2N^2+4N-4}{N(N+4)}$ 或者 $N\geq 9$ 并且 $m>\frac{2N^2+3N+2-\sqrt{8N(N+1)}}{N(N+2)}$ 时，问题 (1.9) 存在整体解. 后来， Li, Wang 等 [32–33] 研究了 $m>2-\frac{2}{N}$ 时解的整体有界性. 之后， Wang 等 [34,35] 以及 Liu 等 [36] 优化了文献 [32–33] 中的结果. 另外， Jin[37] 在对 $\frac{\chi}{\mu}$ 加上小的假设性条件后，得到对任意的 $m>0$, 问题 (1.9) 均存在整体有界解.

接下来讨论问题 (1.1) 的特殊情形 ($g(u)=u,k=2,a=\lambda=\mu$) 的相关结果：Liu 等 [38] 证得当 $N=2$ 且 $\max\{1-\alpha,1-\beta\}<m+\frac{2}{N}-1$ 或者 $N\geq 3$ 并且 $\max\{1-\alpha,1-\beta\}<m+\frac{2}{N}-1$, 其中 $m>2-\frac{2}{N}$ 或 $m\leq 1$ 时，解是整体存在并且一致有界的；之后， Xu 等 [39] 在三维空间上研究表明，当 $m>0,\alpha>0,\beta\geq 0$ 时，弱解是整体有界的；随后，他们还讨论了解的大时间行为. 对于带非线性信号产生项 (即 $g(u)=u^\gamma$) 的问题 (1.1), Dai 和 Liu[40] 得到当 $\max\{1-\alpha+\gamma,1-\beta+\gamma\}-m<\frac{2}{N}$, 或者 $\max\{1-\alpha+\gamma,1-\beta+\gamma\}<k$, 或者 $\max\{1-\alpha+\gamma,1-\beta+\gamma\}=k$ 并且 $\mu>0$ 比较大时，问题 (1.1) 存在整体有界的古典解. 此外，他们在文献中还讨论了解的渐近行为.

本文的目标是探究非线性扩散项和信号产生项对解的整体有界性的影响，主要结果如下.

定理 1.1 记 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是具光滑边界的有界域并且初值 (u_0,v_0,w_0) 满足条件 (1.6). 假设 D,H,S 和 g 满足条件 (1.2)–(1.5), 则

(i) 当 $0<\gamma\le\frac{2}{3}$ 时，若 $\alpha>\gamma-k+1$ 并且 $\beta>1-k$, 问题 (1.1) 存在整体有界的古典解 (u,v,w).

(ii) 当 $\frac{2}{3}<\gamma\le 1$ 时, 若 $\alpha>\gamma-k+\frac{1}{e}+1$ 并且 $\beta>\max\{\frac{(3\gamma-2)(3\gamma+2k-2)}{6}-k+1,\frac{(3\gamma-2)(\gamma+\frac{1}{e})}{3}-k+1\}$, 或者 $\alpha>\gamma-k+1$ 并且 $\beta>\max\{\frac{(3\gamma-2)(3\gamma+2k-2)}{6}-k+1,\frac{(3\gamma-2)(\alpha+k-1)}{3}-k+1\}$, 问题 (1.1) 存在整体有界的古典解 (u,v,w).

2 预备知识

首先，我们给出古典解的局部存在性结果.

引理 2.1[31,38] 记 $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\ge 1)$ 是具光滑边界的有界域. 假设定理 1.1 的条件成立，则存在常数 $T_{\max}\in(0,\infty]$ 以及局部古典解 (u,v,w) 满足

$$\begin{cases}u\in C^0(\overline{\Omega}\times[0,T_{\max}))\cap C^{2,1}(\overline{\Omega}\times[0,T_{\max})),\\ v\in C^0(\overline{\Omega}\times[0,T_{\max}))\cap C^{2,1}(\overline{\Omega}\times[0,T_{\max})),\\ w\in C^{2,1}(\overline{\Omega}\times[0,T_{\max})),\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 $u,v\ge 0$ 在 $\Omega\times(0,T_{\max})$ 上，并且 $0\le w\le\|w\|_{L^\infty(\Omega)}$. 另外，若 $T_{\max}<\infty$, 则

$$\lim_{t\to T_{\max}}\sup(\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|v(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}+\|w(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)})=\infty.$$

接下来我们继续给出一个引理，可参考文献 [41–42].

引理 2.2 假设 $z_0\in W^{2,p}(\Omega)$ 并且 $f\in L^p(0,T;L^p(\Omega))$, 则下面的问题

$$\begin{cases}z_t=\triangle z-z+f,\\ \dfrac{\partial z}{\partial\nu}=0,\\ v(x,0)=v_0(x),\end{cases}\tag{2.2}$$

存在唯一解 $z\in L^p_{loc}((0,+\infty);W^{2,p}(\Omega))$ 满足 $z_t\in L^p_{loc}((0,+\infty);L^p(\Omega))$, 并且对于 $t_0\in(0,T)$, 都有

$$\int_{t_0}^T\int_\Omega \mathrm{e}^{pt}|\triangle z|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C_p\int_{t_0}^T\int_\Omega \mathrm{e}^{pt}|f|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C_p\|z(\cdot,t_0)\|^p_{W^{2,p}(\Omega)},\tag{2.3}$$

其中 C_p 是不依赖于 t_0 的常数.

下面的引理介绍了问题 (1.1) 解的一些基本性质，其主要想法来自于文献 [32].

引理 2.3 假设 (u,v,w) 是问题 (1.1) 的解，并且 D,H,S 和 g 满足条件 (1.2)–(1.5), 其中 $0<\gamma\le 1$, 则下面结论成立

(i) 存在常数 $C>0$ 使得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}\le C\mu^{-\frac{1}{k-1}},\ \forall\, t\in(0,T_{\max}).\tag{2.4}$$

(ii) 对任意 $s\in[1,\frac{N}{(N\gamma-2)_+})$, 都存在常数 $C_s>0$ 使得

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^s(\Omega)}\leq C_s,\ \forall\, t\in(0,T_{\max}),\tag{2.5}$$

其中 $(N\gamma-2)_+:=\max\{N\gamma-2,0\}$.

(iii) 假设 $p>\max\{\frac{N\gamma}{2},\gamma\}$ 并且 $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}\leq C$, 则存在常数 $C_p>0$ 使得

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C_p,\ \forall\, t\in(0,T_{\max}).\tag{2.6}$$

(iv) 假设 $q>Nr$ 并且 $\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\Omega)}\leq C$, 则存在常数 $C_q>0$ 使得

$$\|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C_q,\ \forall\, t\in(0,T_{\max}).\tag{2.7}$$

证 对问题 (1.1) 的第一个方程在 Ω 上进行积分，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x\leq a\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega u^k(x,t)\mathrm{d}x.\tag{2.8}$$

Young 不等式表明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x+\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x\leq(|a|+1)^{\frac{k}{k-1}}|\Omega|\mu^{-\frac{1}{k-1}},\tag{2.9}$$

这蕴含着 (2.4) 式成立．利用 Neumann 热半群的连续性质，再结合 $(1.1)_2$ 式和 (1.5) 式可得

$$v=\mathrm{e}^{t(\triangle-1)}v_0+\int_0^t\mathrm{e}^{t(\triangle-1)}g(u)\mathrm{d}s\leq\mathrm{e}^{t(\triangle-1)}v_0+C_g\int_0^t\mathrm{e}^{t(\triangle-1)}u^\gamma\mathrm{d}s.\tag{2.10}$$

令 $s\in[1,\frac{N}{(N\gamma-2)_+})$, 由 (2.10) 式以及 [42, 引理 1.3(i)] 可知对任意的 $t\in(0,T_{\max})$,

$$\begin{aligned}\|v(\cdot,t)\|_{L^s(\Omega)}&\leq\|\mathrm{e}^{t(\triangle-1)}v_0\|_{L^s(\Omega)}+C_g\int_0^t\|\mathrm{e}^{(t-\tau)(\triangle-1)}(u^\gamma-\overline{u^\gamma}+\overline{u^\gamma})(\cdot,\tau)\|_{L^s(\Omega)}\mathrm{d}\tau\\&\leq C_1\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}+C_1\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\|\overline{u^\gamma}(\cdot,\tau)\|_{L^s(\Omega)}\mathrm{d}\tau\\&\quad+C_1\int_0^t(1+(t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\gamma-\frac{1}{s})})\|u^\gamma(\cdot,\tau)-\overline{u^\gamma}(\cdot,\tau)\|_{L^{\frac{1}{\gamma}}(\Omega)}\mathrm{e}^{-\lambda_1(t-\tau)}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{2.11}$$

其中 $C_1>0$ 是一个常数， $\overline{u^\gamma}(\tau)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^\gamma(x,\tau)\mathrm{d}x$. 由 $0<\gamma\leq1$ 得

$$(u^\gamma-\overline{u^\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}\leq(u^\gamma+\overline{u^\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}\leq C_2(u+1),\tag{2.12}$$

其中 $C_2>0$. 因此，通过 (2.12) 式和 (2.4) 式可知

$$\|u^\gamma(\cdot,\tau)-\overline{u^\gamma}(\cdot,\tau)\|_{L^{\frac{1}{\gamma}}(\Omega)}\leq C_3,\tag{2.13}$$

其中 C_3 是一个正常数．将 (2.13) 式代入 (2.11) 式，可得

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^s(\Omega)}\leq C_4,\ \forall\, t\in(0,T_{\max}),\tag{2.14}$$

这表明 (2.5) 式成立．利用类似的方法也可以得到 (2.6) 式和 (2.7) 式．证毕. ▍

引理 2.4[28] 假设 (u,v,w) 是问题 (1.1) 的解，则对任意的 $(x,t)\in\Omega\times(0,T_{\max})$, 成立

$$-\triangle w(x,t)\leq\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}v(x,t)+M,\tag{2.15}$$

其中

$$M:=\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}+4\|\nabla\sqrt{w_0}\|^2_{L^\infty(\Omega)}+\frac{\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}}{e}.\tag{2.16}$$

3 定理 1.1 的证明

为证明问题 (1.1) 存在整体有界的古典解，首先给出下面的引理. 为方便起见，记 $T := T_{\max}$.

引理 3.1 假设 D, H, S 以及 g 满足条件 (1.2)–(1.5), 其中 $\beta > 1-k$, 则有如下结果

(i) 令 $\alpha > \gamma - k + \frac{1}{e} + 1$ 且 $p > \max\{1, \beta, \frac{3\gamma}{2} + 1 - k, \gamma - k + \frac{1}{e} + 1\}$. 若存在常数 $C_p > 0$ 满足

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^{\frac{p+k-1}{\beta+k-1}}(\Omega)} \le C_p,\ \forall\, t \in (0,T), \tag{3.1}$$

则

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \le C,\ \forall\, t \in (0,T), \tag{3.2}$$

其中 $C > 0$ 与常数 C_p, μ 有关.

(ii) 令 $\alpha > \gamma - k + 1$ 且 $p > \max\{1, \alpha, \beta\}$. 若存在常数 $C_p > 0$ 满足

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^{\frac{p+k-1}{\beta+k-1}}(\Omega)} \le C_p,\ \forall\, t \in (0,T), \tag{3.3}$$

则

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \le C,\ \forall\, t \in (0,T), \tag{3.4}$$

其中 $C > 0$ 与时间 T 无关.

证 在问题 (1.1) 的第一个方程两边同乘 $(1+u)^{p-1}$, 并且在 Ω 上积分，则有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (u+1)^p \mathrm{d}x \\
\le\ & -(p-1)C_D\int_\Omega (u+1)^{m+p-3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + (p-1)\int_\Omega (u+1)^{p-2}H(u)\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x \\
& +(p-1)\int_\Omega (u+1)^{p-2}S(u)\nabla u\cdot\nabla w\mathrm{d}x + \int_\Omega (u+1)^{p-1}u(a-\mu u^{k-1}-\lambda w)\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

因为 $(u+1)^k \le 2^{k-1}(u^k+1)$, 所以

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (u+1)^{p-1}u(a-\mu u^{k-1}-\lambda w)\mathrm{d}x \\
\le\ & |a|\int_\Omega (u+1)^p\mathrm{d}x - \frac{\mu}{2^{k-1}}\int_\Omega (u+1)^{k+p-1}\mathrm{d}x + \mu\int_\Omega (u+1)^{p-1}\mathrm{d}x \\
\le\ & -\frac{5\mu}{6\cdot 2^{k-1}}\int_\Omega (1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x + C_0,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中 $C_0 = (3\cdot 2^{k+1})^{\frac{p}{k-1}} a^{\frac{p+k-1}{k-1}}|\Omega|\mu^{-\frac{p}{k-1}} + (3\cdot 2^{k+1})^{\frac{p-1}{k}}|\Omega|\mu$. 结合 (3.5) 式和 (3.6) 式可知

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (u+1)^p\mathrm{d}x \\
\le\ & (p-1)\int_\Omega (u+1)^{p-2}H(u)\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x + (p-1)\int_\Omega (u+1)^{p-2}S(u)\nabla u\cdot\nabla w\mathrm{d}x \\
& -\frac{5\mu}{6\cdot 2^{k-1}}\int_\Omega (1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x + C_0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

定义

$$\varphi(z) := \int_0^z (1+\sigma)^{p-2}H(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \quad z \ge 0.$$

(1.3) 式表明

$$0 \le \varphi(z) \le \chi \int_0^z (1+\sigma)^{p-\alpha-1} \mathrm{d}\sigma,$$

这意味着对任意的 $z \ge 0$, 都有

$$\varphi(z) \le \begin{cases} \dfrac{2\chi}{|p-\alpha|}, & \text{若 } p < \alpha, \\ \chi \ln(1+z), & \text{若 } p = \alpha, \\ \dfrac{\chi}{p-\alpha}(1+z)^{p-\alpha}, & \text{若 } p > \alpha. \end{cases} \tag{3.8}$$

通过分部积分可知

$$\begin{aligned} (p-1)\int_\Omega (1+u)^{p-2} H(u) \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x &= (p-1)\int_\Omega \nabla \varphi(u) \cdot \nabla v \mathrm{d}x \\ &\le (p-1)\int_\Omega \varphi(u) |\triangle v| \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.9}$$

情形 (i) 结合 (3.8) 式和 (3.9) 式，当 $\gamma - k + \frac{1}{e} + 1 < p < \alpha$ 时，有

$$\begin{aligned} (p-1)\int_\Omega (1+u)^{p-2} H(u) \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x &\le \frac{2\chi(p-1)}{|p-\alpha|}\int_\Omega |\triangle v| \\ &\le \frac{2\chi(p-1)}{|p-\alpha|}\int_\Omega |\triangle v|^{\frac{3}{2}} + C_1, \end{aligned} \tag{3.10}$$

其中 $C_1 = \frac{2\chi(p-1)|\Omega|}{|p-\alpha|}$. 当 $p > \alpha$ 时，有

$$\begin{aligned} (p-1)\int_\Omega (1+u)^{p-2} H(u) \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x &\le \frac{\chi(p-1)}{p-\alpha}\int_\Omega (1+u)^{p-\alpha} |\triangle v| \mathrm{d}x \\ &\le \frac{\mu}{3 \cdot 2^k}\int_\Omega (1+u)^{p+k-1} + C_2 \int_\Omega |\triangle v|^{\frac{p+k-1}{k+\alpha-1}}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

其中 $C_2 = (3 \cdot 2^k)^{\frac{p-\alpha}{\alpha+k-1}} (\frac{\chi(p-1)}{p-\alpha})^{\frac{p+k-1}{\alpha+k-1}} \mu^{-\frac{p-\alpha}{\alpha+k-1}}$. 当 $p = \alpha$ 时，有

$$\begin{aligned} & (p-1)\int_\Omega (1+u)^{p-2} H(u) \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x \\ \le{} & (p-1)\chi \int_\Omega \ln(1+u) |\triangle v| \mathrm{d}x \\ \le{} & (p-1)\chi \int_\Omega (1+u)^{\frac{1}{e}} |\triangle v| \mathrm{d}x \\ \le{} & \frac{\mu}{3 \cdot 2^k}\int_\Omega (1+u)^{p+k-1} + \widetilde{C}_2 \int_\Omega |\triangle v|^{\frac{e(p+k-1)}{e(p+k-1)-1}}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 $\widetilde{C}_2 = (3 \cdot 2^k)^{\frac{1}{e(p+k-1)-1}} (\chi(p-1))^{\frac{e(p+k-1)}{e(p+k-1)-1}} \mu^{-\frac{1}{e(p+k-1)-1}}$.

对任意的 $z \ge 0$, 定义函数 $\psi(z) = \int_0^z (1+\sigma)^{p-2} S(\sigma) \mathrm{d}\sigma$. 结合 (1.4) 式和 $p > \beta$ 可知

$$0 \le \psi(z) \le \frac{\xi}{p-\beta}(1+z)^{p-\beta}, \ \forall\, z \ge 0.$$

注意到引理 2.4 以及 $\beta > 1-k$, 则有

$$\begin{aligned}
&(p-1)\int_\Omega (1+u)^{p-2}S(u)\nabla u\cdot\nabla w\mathrm{d}x \\
&= -(p-1)\int_\Omega \psi(u)\cdot\triangle w\mathrm{d}x \\
&\le (p-1)\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega \psi(u)v\mathrm{d}x + (p-1)M\int_\Omega \psi(u)\mathrm{d}x \\
&\le \frac{\xi(p-1)}{p-\beta}\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega (1+u)^{p-\beta}v\mathrm{d}x + \frac{\xi M(p-1)}{p-\beta}\int_\Omega (1+u)^{p-\beta}\mathrm{d}x \\
&\le \frac{\mu}{3\cdot 2^{k-1}}\int_\Omega (1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x + C_3\int_\Omega v^{\frac{p+k-1}{\beta+k-1}}\mathrm{d}x + C_4,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

其中

$$\begin{aligned}
&C_3 = (3\cdot 2^k)^{\frac{p-\beta}{\beta+k-1}}\Big(\frac{\xi(p-1)}{p-\beta}\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)^{\frac{p+k-1}{\beta+k-1}}\mu^{-\frac{p-\beta}{\beta+k-1}}, \\
&C_4 = (3\cdot 2^k)^{\frac{p-\beta}{\beta+k-1}}\Big(\frac{\xi k(p-1)}{p-\beta}\Big)^{\frac{p+k-1}{\beta+k-1}}|\Omega|\mu^{-\frac{p-\beta}{\beta+k-1}}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

当 $\gamma - k + \frac{1}{e} + 1 < p < \alpha$ 时，由 (3.1), (3.7), (3.10) 式以及 (3.13) 式可推出

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (1+u)^p \le -\frac{\mu}{2^k}\int_\Omega (1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x + \frac{2\chi(p-1)}{|p-\alpha|}\int_\Omega |\triangle v|^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x + C_5, \tag{3.15}$$

其中 $C_5 = C_3 C_0^{\frac{p+k-1}{\beta+k-1}} + C_4 + C_0 + C_1$. 又因为

$$\frac{3}{2p}\int_\Omega (1+u)^p\mathrm{d}x \le \frac{\mu}{3\cdot 2^{k-1}}\int_\Omega (1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x + C_6, \tag{3.16}$$

其中 $C_6 = (\frac{1}{p})^{\frac{p+k-1}{k-1}}(3\cdot 2^{k-1})^{\frac{p}{k-1}}|\Omega|\mu^{-\frac{p}{k-1}}$. 所以结合 (3.15) 式和 (3.16) 式，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (1+u)^p\mathrm{d}x + \frac{3}{2p}\int_\Omega (1+u)^p\mathrm{d}x \\
&\le -\frac{\mu}{3\cdot 2^k}\int_\Omega (1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x + \frac{2\chi(p-1)}{|p-\alpha|}\int_\Omega |\triangle v|^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x + C_7,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中 $C_7 = C_5 + C_6$. 常数变化公式表明

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_\Omega (1+u)^p\mathrm{d}x \le & -\frac{\mu}{3\cdot 2^k}\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(t-s)}(1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
& + \frac{2\chi(p-1)}{|p-\alpha|}\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(t-s)}|\triangle v|^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
& + \frac{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(t-t_0)}}{p}\int_\Omega (1+u(\cdot,t_0))^p\mathrm{d}x + C_7\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(t-s)}\mathrm{d}s \\
\le & -\frac{\mu}{3\cdot 2^k}\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(t-s)}(1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
& + \frac{2\chi(p-1)}{|p-\alpha|}\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(t-s)}|\triangle v|^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \frac{M_0}{p} + C_7,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 $M_0=\int_\Omega(1+u(\cdot,t_0))^p\mathrm{d}x$. 因为 $p>\frac{3\gamma}{2}+1-k$, 通过引理 2.2, Young 不等式和 (1.5) 式可得

$$\begin{aligned}
&\frac{2\chi(p-1)}{|p-\alpha|}\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(t-s)}|\triangle v|^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
\le{}&\frac{2\chi(p-1)C}{|p-\alpha|}\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(t-s)}u^{\frac{3\gamma}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\frac{2\chi(p-1)C}{|p-\alpha|}\|v(\cdot,t_0)\|^{\frac{3}{2}}_{W^{2,\frac{3}{2}}(\Omega)}\\
\le{}&\frac{\mu}{3\cdot 2^k}\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(t-s)}(u+1)^{p+k-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s+C_8,
\end{aligned}\tag{3.19}$$

其中 C_8 是一个正常数. 结合 (3.18) 式可得

$$\frac{1}{p}\int_\Omega(1+u(\cdot,t))^p\mathrm{d}x\le C_9,\ \forall\, t\in(0,T),\tag{3.20}$$

其中 $C_9=\frac{M_0}{p}+C_7+C_8$.

当 $p>\alpha$ 时，注意到 (3.1), (3.7), (3.11) 和 (3.13) 式，则有

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(1+u)^p\mathrm{d}x\le-\frac{\mu}{3\cdot 2^{k-1}}\int_\Omega(1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x+C_2\int_\Omega|\triangle v|^{\frac{p+k-1}{\alpha+k-1}}\mathrm{d}x+C_5,\tag{3.21}$$

其中 $C_5=C_3C_0^{\frac{p+k-1}{\beta+k-1}}+C_4+C_0$. 定义

$$m:=\frac{p+k-1}{\alpha+k-1},$$

我们由 (3.21) 式得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(1+u)^p\mathrm{d}x+\frac{m}{p}\int_\Omega(1+u)^p\mathrm{d}x\\
\le{}&-\frac{\mu}{3\cdot 2^k}\int_\Omega(1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x+C_2\int_\Omega|\triangle v|^m\mathrm{d}x+C_{10},
\end{aligned}\tag{3.22}$$

其中 $C_{10}=C_5+(3\cdot 2^k)^{\frac{p}{k-1}}(\frac{m}{p})^{\frac{p+k-1}{k-1}}|\Omega|\mu^{-\frac{p}{k-1}}$. 回顾引理 2.2, 再综合 (3.22) 式可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_\Omega(1+u)^p\mathrm{d}x\le{}&-\frac{\mu}{3\cdot 2^k}\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-m(t-s)}(1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&+C_2\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-m(t-s)}|\triangle v|^m\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\frac{\mathrm{e}^{-m(t-t_0)}}{p}\int_\Omega(1+u(\cdot,t_0))^p\mathrm{d}x\\
&+C_{10}\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-m(t-s)}\mathrm{d}s\\
\le{}&-\frac{\mu}{3\cdot 2^k}\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-m(t-s)}(1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&+C_2C_m\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-m(t-s)}(1+u)^{m\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&+C_2C_m\|v(\cdot,t_0)\|^m_{W^{2,m}(\Omega)}+\frac{M_0}{p}+C_{10}.
\end{aligned}\tag{3.23}$$

因为 $\alpha>\gamma-k+\frac{1}{e}+1$, 所以 $m\gamma<p+k-1$. 利用 Young 不等式计算可得

$$C_2C_m\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-m(t-s)}(1+u)^{m\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\le\frac{\mu}{3\cdot 2^k}\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-m(t-s)}(1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s+C_{11},\tag{3.24}$$

其中 $C_{11}=\frac{1}{m}(3\cdot 2^k)^{\frac{m\gamma}{p+k-1-m\gamma}}(C_2C_m)^{\frac{p+k-1}{p+k-1-m\gamma}}|\Omega|\mu^{-\frac{m\gamma}{p+k-1-m\gamma}}$. 将 (3.24) 式代入 (3.23) 式，可知

$$\frac{1}{p}\int_\Omega(1+u(\cdot,t))^p\mathrm{d}x\le C_{12},\ \forall\, t\in(0,T),\tag{3.25}$$

其中 $C_{12}=C_2C_m\|v(\cdot,t_0)\|^m_{W^{2,m}(\Omega)}+\frac{M_0}{p}+C_{10}+C_{11}$.

当 $p=\alpha$ 时，综合 (3.1) 式，(3.7) 式，(3.12) 式和 (3.13) 式可得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(1+u)^p\mathrm{d}x\le-\frac{\mu}{3\cdot 2^{k-1}}\int_\Omega(1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x+\widetilde{C}_2\int_\Omega|\triangle v|^{\frac{e(p+k-1)}{e(p+k-1)-1}}\mathrm{d}x+C_5.\tag{3.26}$$

定义

$$\widetilde{m}:=\frac{e(p+k-1)}{e(p+k-1)-1},$$

类似 (3.23) 式，通过计算容易证明

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\int_\Omega(1+u)^p\mathrm{d}x\le&-\frac{\mu}{3\cdot 2^k}\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-\widetilde{m}(t-s)}(1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&+\widetilde{C}_2C_{\widetilde{m}}\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-\widetilde{m}(t-s)}(1+u)^{\widetilde{m}\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&+\widetilde{C}_2C_{\widetilde{m}}\|v(\cdot,t_0)\|^{\widetilde{m}}_{W^{2,\widetilde{m}}(\Omega)}+\frac{M_0}{p}+\widetilde{C}_{10},\end{aligned}\tag{3.27}$$

其中 $\widetilde{C}_{10}=C_5+(3\cdot 2^k)^{\frac{p}{k-1}}(\frac{\widetilde{m}}{p})^{\frac{p+k-1}{k-1}}|\Omega|\mu^{-\frac{p}{k-1}}$. 由于 $\alpha=p>\gamma-k+\frac{1}{e}+1$, 则有 $\widetilde{m}\gamma<p+k-1$. Young 不等式表明

$$\begin{aligned}&\widetilde{C}_2C_{\widetilde{m}}\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-\widetilde{m}(t-s)}(1+u)^{\widetilde{m}\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\\le&\frac{\mu}{3\cdot 2^k}\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-\widetilde{m}(t-s)}(1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\widetilde{C}_{11},\end{aligned}\tag{3.28}$$

其中 $\widetilde{C}_{11}=\frac{1}{\widetilde{m}}(3\cdot 2^k)^{\frac{\widetilde{m}\gamma}{p+k-1-\widetilde{m}\gamma}}(\widetilde{C}_2C_{\widetilde{m}})^{\frac{p+k-1}{p+k-1-\widetilde{m}\gamma}}|\Omega|\mu^{-\frac{\widetilde{m}\gamma}{p+k-1-\widetilde{m}\gamma}}$. 将 (3.28) 式代入 (3.27) 式，可得

$$\frac{1}{p}\int_\Omega(1+u(\cdot,t))^p\mathrm{d}x\le \widetilde{C}_{12},\ \forall\, t\in(0,T),\tag{3.29}$$

其中 $\widetilde{C}_{12}=\widetilde{C}_2C_{\widetilde{m}}\|v(\cdot,t_0)\|^{\widetilde{m}}_{W^{2,\widetilde{m}}(\Omega)}+\frac{M_0}{p}+\widetilde{C}_{10}+\widetilde{C}_{11}$.

情形 (ii)　当 $p>\alpha$ 并且 $\alpha>\gamma-k+1$ 时，定义

$$m:=\frac{p+k-1}{\alpha+k-1},\tag{3.30}$$

类似 (3.23) 式，容易证明

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\int_\Omega(1+u)^p\mathrm{d}x\le&-\frac{\mu}{3\cdot 2^k}\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-m(t-s)}(1+u)^{p+k-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&+C_2C_m\int_{t_0}^t\int_\Omega \mathrm{e}^{-m(t-s)}(1+u)^{m\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&+C_2C_m\|v(\cdot,t_0)\|^m_{W^{2,m}(\Omega)}+\frac{M_0}{p}+C_{10}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

由 $\alpha>\gamma-k+1$, 可得 $m\gamma<p+k-1$, 再利用 (3.31) 式可知

$$\frac{1}{p}\int_{\Omega}(1+u(\cdot,t))^{p}\mathrm{d}x\leq C_{13},\ \forall\,t\in(0,T),\tag{3.32}$$

其中 $C_{13}>0$ 是一个常数. 证毕.

引理 3.2 假设 D,H,S 和 g 满足条件 (1.2)–(1.5). 则下面结论成立

(I) 若 $0<\gamma\leq\frac{2}{3}$, $\alpha>\gamma-k+1$ 并且 $\beta>1-k$, 则存在常数 $C>0$, 使得对任意 $t\in(0,T)$, 都有 $\|v(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\leq C$.

(II) 若 $\frac{2}{3}<\gamma\leq1$, $\alpha>\gamma-k+\frac{1}{e}+1$ 并且 $\beta>\max\{\frac{(3\gamma-2)(3\gamma+2k-2)}{6}-k+1,\frac{(3\gamma-2)(\gamma+\frac{1}{e})}{3}-k+1\}$, 或者 $\alpha>\gamma-k+1$ 并且 $\beta>\max\{\frac{(3\gamma-2)(3\gamma+2k-2)}{6}-k+1,\frac{(3\gamma-2)(\alpha+k-1)}{3}-k+1\}$, 则存在常数 $C>0$, 使得对任意 $t\in(0,T)$, 都有 $\|v(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\leq C$.

证 对于 $0<\gamma\leq\frac{2}{3}$ 的情形，由引理 2.3(i), (ii) 可得对任意的 $s\geq1$, 有

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^{s}(\Omega)}\leq C_{14},\ \forall\,t\in(0,T).\tag{3.33}$$

取 $p_1>\max\{\frac{3\gamma}{2},1,\alpha,\beta\}$, 这意味着 $\frac{p_1+k-1}{\beta+k-1}>1$, 因此由 (3.33) 式可得

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^{\frac{p_1+k-1}{\beta+k-1}}(\Omega)}\leq C_{15},\ \forall\,t\in(0,T).\tag{3.34}$$

再结合引理 3.1(ii), 可知

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{p_1}(\Omega)}\leq C_{16},\ \forall\,t\in(0,T).\tag{3.35}$$

由于 $p_1>\frac{3\gamma}{2}$, 因此可以通过引理 2.4(iii) 得到

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)}\leq C_{17},\ \forall\,t\in(0,T).\tag{3.36}$$

再次利用引理 3.1(ii) 并且令 $p_2>\max\{3\gamma,1,\alpha,\beta\}$, 可得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{p_2}(\Omega)}\leq C_{18},\ \forall\,t\in(0,T).\tag{3.37}$$

引理 2.3(iv) 表明

$$\|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)}\leq C_{19},\ \forall\,t\in(0,T),\tag{3.38}$$

这蕴含了情形 (I) 成立.

对于 $\frac{2}{3}<\gamma\leq1$ 的情形，由于 $\beta>\frac{(3\gamma-2)(3\gamma+2k-2)}{6}-k+1$ 并且 $\beta>\frac{(3\gamma-2)(\gamma+\frac{1}{e})}{3}-k+1$, 可知

$$\begin{aligned}&\frac{3\gamma}{2}<\frac{3}{3r-2}(\beta+k-1)+1-k,\\&\gamma-k+\frac{1}{e}+1<\frac{3}{3\gamma-2}(\beta+k-1)+1-k,\\&\beta<\frac{3}{3r-2}(\beta+k-1)+1-k.\end{aligned}\tag{3.39}$$

取 $\max\{\frac{3\gamma}{2},\gamma-k+\frac{1}{e}+1,\beta\}<p_3<\frac{3}{3r-2}(\beta+k-1)+1-k$, 则有

$$\frac{p_3+k-1}{\beta+k-1}\in(1,\frac{3}{3\gamma-2}).\tag{3.40}$$

通过引理 2.3(ii), 可以得到

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^{\frac{p_3+k-1}{\beta+k-1}}(\Omega)} \le C_{20},\ \forall\, t\in(0,T). \tag{3.41}$$

结合引理 3.1(i) 以及 $k>1$, 可知

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{p_3}(\Omega)} \le C_{21},\ \forall\, t\in(0,T). \tag{3.42}$$

由于 $p_3>\frac{3\gamma}{2}$, 利用引理 2.4(iii), 可以得到

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \le C_{22},\ \forall\, t\in(0,T). \tag{3.43}$$

再次使用引理 3.1(i) 并且令 $p_4>\max\{3\gamma,\gamma-k+\frac{1}{e}+1,\beta\}$, 不难证明

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{p_4}(\Omega)} \le C_{23},\ \forall\, t\in(0,T). \tag{3.44}$$

结合引理 2.3(iv), 可知

$$\|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \le C_{24},\ \forall\, t\in(0,T). \tag{3.45}$$

类似地，若 $\beta>\max\{\frac{(3\gamma-2)(3\gamma+2k-2)}{6}-k+1,\frac{(3\gamma-2)(\alpha+k-1)}{3}-k+1\}$, 选取 p_5 满足条件

$$\max\{\frac{3\gamma}{2},\alpha,\beta\}<p_5<\frac{3}{3r-2}(\beta+k-1)+1-k, \tag{3.46}$$

则有 $\frac{p_5+k-1}{\beta+k-1}\in(1,\frac{3}{3\gamma-2})$. 引理 2.3(iii) 和引理 3.1(ii) 表明 $\|u\|_{L^{p_5}(\Omega)}\le C_{25}$ 和 $\|v\|_{L^{\infty}(\Omega)}\le C_{26}$. 再次利用引理 3.1(ii) 并且令 $p_6>\max\{3\gamma,\alpha,\beta\}$, 可知 $\|u(\cdot,t)\|_{L^{p_6}(\Omega)}\le C_{27}$. 再而，通过引理 2.3(iv) 可得 $\|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)}\le C_{28}$, 这蕴含了情形 (II) 成立．证毕. ▌

定理 1.1 的证明　利用引理 3.2, 再结合著名的 Moser-Alikakos 迭代技术 [32–33,39] 可知 $\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ 的一致有界性．再结合引理 2.1, 便可完成定理 1.1 的证明. ▌

参 考 文 献

[1] Winkler M. Does a ‘volume-filling effect’ always prevent chemotactic collapse? Math Methods Appl Sci, 2010, **33**: 12–24

[2] Tao Y, Winkler M. Boundedness in a quasilinear parabolic-parabolic Keller-Segel system with subcritical sensitivity. J Differential Equations, 2012, **252**: 692–715

[3] Ishida S, Seki K, Yokota T. Boundedness in quasilinear Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type on non-convex bounded domains. J Differential Equations, 2014, **256**: 2993–3010

[4] CieśLak T, Stinner C. New critical exponents in a fully parabolic quasilinear Keller-Segel and applications to volume filling models. J Differential Equations, 2015, **258**: 2080–2113

[5] Zheng J. Boundedness of solutions to a quasilinear parabolic-parabolic Keller-Segel system with a logistic source. J Math Anal Appl, 2015, **431**: 867–888

[6] Tao X, Zhou A, Ding M. Boundedness of solutions to a quasilinear parabolic-parabolic chemotaxis model with nonlinear signal production. J Math Anal Appl, 2019, **474**: 733–747

[7] Ding M, Wang W, Zhou S, Zheng S. Asymptotic stability in a fully parabolic quasilinear chemotaxis model with general logistic source and signal production. J Differential Equations, 2020, **268**(11): 6729–6777

[8] Winkler M. Finite-time blow-up in low-dimensional Keller-Segel systems with logistic-type superlinear degradation. Z Angew Math Phys, 2018, **69**: 40

[9] Cieslak T, Stinner C. Finite-time blowup and global-in-time unbounded solutions to a parabolic-parabolic quasilinear Keller-Segel system in higher dimensions. J Differential Equations, 2012, **252**: 5832–5851

[10] Cieslak T, Winkler M. Finite-time blow-up in a quasilinear system of chemotaxis. Nonlinearity, 2008, **21**: 1057–1076

[11] Herrero M, Velázquez J. A blow-up mechanism for a chemotaxis model. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci, 1997, **24** (4): 633–683

[12] Nagai T. Blow-up of nonradial solutions to parabolic-elliptic systems modeling chemotaxis in two-dimensional domains. J Inequal Appl, 2001, **6**: 37–55

[13] Osaki K, Tsujikawa T, Yagi A, Mimura M. Exponential attractor for a chemotaxis-growth system of equations. Nonlinear Anal, 2002, **51**: 119–144

[14] Painter K J, Hillen T. Volume-filling and quorum-sensing in models for chemosensitive movement. Can Appl Math Q, 2002, **10**: 501–543

[15] Wang L, Li Y, Mu C. Boundedness in a parabolic-parabolic quasilinear chemotaxis system with logistic source. Discrete Contin Dyn Syst Ser A, 2014, **34**: 789–802

[16] Winkler M. Chemotaxis with logistic source: very weak global solutions and their boundedness properties. J Math Anal Appl, 2008, **348**: 708–729

[17] Winkler M. Boundedness in the higher-dimensional parabolic-parabolic chemotaxis system with logistic source. Comm Partial Differ Equ, 2010, **35**: 1516–1537

[18] Winkler M. Blow-up in a higher-dimensional chemotaxis system despite logistic growth restriction. J Math Anal Appl, 2011, **384**: 261–272

[19 Zhuang M, Wang W, Zheng S. Boundedness in a fully parabolic chemotaxis system with logistic-type source and nonlinear production. Nonlinear Analysis: Real World Appl, 2019, **47**: 473–483

[20] Zeng Y. Existence of global bounded classical solution to a quasilinear attraction-repulsion chemotaxis system with logistic source. Nonlinear Anal, 2017, **161**: 182–197

[21] Ren G, Liu B. Global boundedness and asymptotic behavior in a quasilinear attraction-repulsion chemotaxis model with nonlinear signal production and logistic-type source. Math Models Methods Appl Sci, 2020, **30**(13): 2619–2689

[22] Winkler M. Boundedness and large time behavior in a three-dimensional chemotaxis-Stokes system with nonlinear diffusion and general sensitivity. Calc Var Partial Differ Equ, 2015, **54**: 3789–3828

[23] Litcanu G, Morales-Rodrigo C. Asymptotic behavior of global solutions to a model of cell invasion. Math Models Methods Appl Sci, 2010, **20**(9): 1721–1758

[24] Marciniak-Czochra A, Ptashnyk M. Boundedness of solutions of a haptotaxis model. Math Models Methods Appl Sci, 2010, **20**(3): 449–476

[25] Chaplain M, Lolas G. Mathematical modelling of cancer invasion of tissue: Dynamic heterogeneity. Netw Heterogen Media, 2016, **1**: 399–439

[26] Tao Y, Wang M. Global solution for a chemotactic-haptotactic model of cancer invasion. Nonlinearity, 2008, **21**: 2221–2238

[27] Tao Y. Global existence of classical solutions to a combined chemotaxis-haptotaxis model with logistic source. J Math Anal Appl, 2009, **354**: 60–69

[28] Tao Y. Boundedness in a two-dimensional chemotaxis-haptotaxis system. 2014, arXiv: 1407.7382

[29] Cao X. Boundedness in a three-dimensional chemotaxis-haptotaxis model. Z Angew Math Phys, 2016, **67**: 11

[30] Zheng J, Ke Y. Large time behavior of solutions to a fully parabolic chemotaxis-haptotaxis model in N dimensions. J Differential Equations, 2019, **266**: 1969–2018

[31] Tao Y, winkler M. A chemotaxis-haptotaxis model: the roles of nonlinear diffusion and logistic source. SIAM J Math Anal, 2011, **43**: 685–704

[32] Li Y, Lankeit J. Boundedness in a chemotaxis-haptotaxis model with nonlinear diffusion. Nonlinearity, 2016, **29**: 1564–1595

[33] Wang Y. Boundedness in the higher-dimensional chemotaxis-haptotaxis model with nonlinear diffusion. J Differential Equations, 2016, **260**: 1975–1989

[34] Wang Y. Boundedness in a multi-dimensional chemotaxis-haptotaxis model with nonlinear diffusion. Appl Math Lett, 2016, **59**: 122–126

[35] Zheng P, Mu C, Song X. On the boundedness and decay of solutions for a chemotaxis-haptotaxis system with nonlinear diffusion. Discrete Contin Dyn Syst Ser A, 2016, **36**: 1737–1757

[36] Liu L, Zheng J, Li Y, Yan W. A new (and optimal) result for boundedness of solution of a quasilinear chemotaxis-haptotaxis model (with logistic source). J Math Anal Appl, 2020, **491**: 124231

[37] Jin C. Boundedness and global solvability to a chemotaxis-haptotaxis model with slow and fast diffusion. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2018, **23** (4): 1675–1688

[38] Liu J, Zheng J, Wang Y. Boundedness in a quasilinear chemotaxis-haptotaxis system with logistic source. Z Angew Math Phys, 2016, **67**: 21
[39] Xu H, Zhang L, Jin C. Global solvability and large time behavior to a chemotaxis-haptotaxis model with nonlinear diffusion. Nonlinear Anal: Real World Appl, 2019, **46**: 238–256
[40] Dai F, Liu B. Asymptotic stability in a quasilinear chemotaxis-haptotaxis model with general logistic source and nonlinear signal production. J Differential Equations, 2020, **269**: 10839–10918
[41] Winkler M. Aggregation vs global diffusive behavior in the higher-dimensional Keller-Segel model. J Differential Equations, 2010, **248**: 2889–2905
[42] Jin C. Global classical solution and boundedness to a chemotaxis-haptotaxis model with re-establishment mechanisms. Bull Lond Math Soc, 2018, **50**: 598–618

Global Boundedness in a Chemotaxis-Haptotaxis Model with Nonlinear Diffusion and Signal Production

[1]Jia Zhe [2,3]Yang Zuodong
([1]*School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Shandong Linyi 276005;*
[2]*School of Teacher Education, Nanjing Normal University, Nanjing 210097;*
[3]*School of Teacher Education, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044*)

Abstract: This paper is concerned with an initial–boundary value problem for the following chemotaxis-haptotaxis model

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot(D(u)\nabla u) - \chi\nabla\cdot(\dfrac{u}{(1+u)^{\alpha}}\nabla v) - \xi\nabla\cdot(\dfrac{u}{(1+u)^{\beta}}\nabla w) + u(a-\mu u^{k-1}-\lambda w), \\ v_t = \triangle v - v + u^{\gamma}, \qquad x\in\Omega,\ t>0, \\ w_t = -vw, \qquad x\in\Omega,\ t>0, \end{cases}$$

under homogenous Neumann boundary condition in a bounded domain $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, with χ,ξ,μ,λ, $\gamma>0$, $k>1$, $a\in\mathbb{R}$, and $D(u)\geq C_D(u+1)^{m-1}$ for $C_D>0, m\in\mathbb{R}$. It is shown that

(i) For $0<\gamma\leq\frac{2}{3}$, if $\alpha>\gamma-k+1$ and $\beta>1-k$, there is a classical solution (u,v,w) which is globally bounded to the above problem.

(ii) For $\frac{2}{3}<\gamma\leq 1$, if $\alpha>\gamma-k+\frac{1}{e}+1$ and

$$\beta>\max\{\frac{(3\gamma-2)(3\gamma+2k-2)}{6}-k+1, \frac{(3\gamma-2)(\gamma+\frac{1}{e})}{3}-k+1\},$$

or $\alpha>\gamma-k+1$ and

$$\beta>\max\{\frac{(3\gamma-2)(3\gamma+2k-2)}{6}-k+1, \frac{(3\gamma-2)(\alpha+k-1)}{3}-k+1\},$$

there is a classical solution (u,v,w) which is globally bounded to the above problem.
Key words: Global existence; Boundedness; Chemotaxis-haptotaxis; Nonlinear diffusion.
MR(2010) Subject Classification: 35K55; 35B35