2021,**41A**(5):1270-1282

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

http://actams.wipm.ac.cn

二维定常 Chaplygin 气体绕直楔流动

贾嘉

(华东师范大学数学科学学院　上海 200241)

摘要：该文主要研究二维定常超音速 Chaplygin 气体绕直楔流动，在 Radon 测度解的定义下得到了 Mach 数大于 1 的所有情况解的精确表达式．与多方气体不同，对 Chaplygin 气体绕流问题, 存在 Mach 数 M_0^*, 当来流 Mach 数大于或等于该数时, 质量会在楔表面集中, 此时, 没有 Lebesgue 意义下的分片光滑解．该文通过极限分析，证明了由 Lebesgue 积分意义下得到的极限与 Radon 测度解意义下求得的解是一致的.

关键词：Chaplygin 气体；Radon 测度解；Riemann 问题；高超音速极限.

MR(2010) 主题分类：35L65; 35Q35; 76J20　**中图分类号**：O175.2　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2021)05-1270-13

1　引言

本文考虑 Chaplygin 气体的二维定常等熵可压 Euler 方程组，由如下质量和动量守恒方程组成

$$\begin{cases}(\rho u)_x+(\rho v)_y=0,\\ (\rho u^2+p)_x+(\rho uv)_y=0,\\ (\rho uv)_x+(\rho v^2+p)_y=0,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中， ρ 和 (u,v) 分别表示质量密度和流体的速度， p 为压强，状态方程为 $p=g(s)-\frac{f(s)}{\rho}$ (参看文献 [1–2]), 在等熵系统中 s 为常数，为方便起见，取 $p=-\frac{1}{\rho}$.

Chaplygin 气体在空气动力学中起着至关重要的作用，其引入一方面作为用于近似计算空气动力学中机翼的升力问题 [1], 另一方面是近年来研究较热的有关暗物质的模型 [3]. 由此可见，无论从理论还是从应用角度， Chaplygin 气体在双曲守恒律方程的研究中占据着重要地位．文献 [4] 中 Qu 和 Yuan 给出了 Chaplygin 气体一维活塞问题的 Radon 测度解的定义，证明了当活塞运动的 Mach 数适当大时在活塞表面形成质量集中，无法用 Lebesgue 积分解刻画，而用 Radon 测度解来刻画能很好地解决这一问题，得到解的存在性．文献 [5] 中 Qu 和 Yuan 等证明了来流 Mach 数趋于无穷时，会在楔体表面形成质量集中．本文主要研究二维定常 Chaplygin 气体绕直楔流动的相关问题，在 Radon 测度解的意义下，对 Mach 数大于 1 和楔角在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 的情形进行完整分析.

收稿日期: 2020-07-29; 修订日期: 2021-01-26

E-mail: jmjvictory@163.com

方程组 (1.1) 可写成一般的守恒律形式

$$\partial_x F(U)+\partial_y G(U)=0,\ U=(\rho,u,v)^T, \tag{1.2}$$

其中 $F(U)=(\rho u,\rho u^2+p,\rho uv)^T,G(U)=(\rho v,\rho uv,\rho v^2+p)^T$.

直楔为 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x\geq 0,0\leq y\leq ax\}$, 其中 $a=\tan\theta$, $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ 表示楔面的倾角．因此，我们考虑的区域为 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x>0,y>ax\}$. 直楔的表面为 $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x\geq 0,y=ax\}$.

假定气体在直楔表面满足滑移条件

$$v=au. \tag{1.3}$$

在直线 $I=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x=0,y>0\}$ 上，气体的状态为

$$U=U_\infty,\quad \text{在 } I \text{ 上}, \tag{1.4}$$

其中 $U_\infty=(\rho_\infty,u_\infty,0)^T$ 为常数.

经过量纲分析 (参看文献 [4]), 方程组 (1.1) 的初值可化为

$$U=U_0=(1,1,0)^T, \tag{1.5}$$

且压强与马赫数的关系为

$$p_0=-\frac{1}{M_0^2}, \tag{1.6}$$

$$p_1=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{M_0^2}, \tag{1.7}$$

其中 M_0 为来流的马赫数, 由 $M_0=\frac{q}{c}$ 给出，q 为气体的速度大小，c 为音速, 满足 $c=\sqrt{\frac{\partial p}{\partial\rho}}$.

2 积分弱解及可解范围

定义 2.1[5] 称 $U\in L^\infty(\Omega)$ 为方程 (1.2)(1.3)(1.5) 的积分弱解, 如果对于任意 $\phi\in C_0^1(\mathbb{R}^2)$, 成立

$$\int_\Omega(F(U)\partial_x\phi+G(U)\partial_y\phi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\infty(aF(U|_w)-G(U|_w))\phi(x,ax)\mathrm{d}x-\int_0^\infty F(U_0)\phi(0,y)\mathrm{d}y. \tag{2.1}$$

方程 (1.2)(1.3)(1.5) 的求解构成了一个 Riemann 问题 (参看文献 [6–8]), 下文中我们将利用自相似方法构造特殊类型的解来解该 Riemann 问题．假设 Riemann 问题的形式解为 $U(x,y)=V(\frac{x}{y})$, 令 $\eta=\frac{x}{y}$, 且解具有分片常数的形式

$$V(\eta)=\begin{cases}V_0=(1,1,0)^T,\ 0\leq\eta<\dfrac{1}{\sigma},\\ V_1,\qquad\qquad\quad \dfrac{1}{\sigma}<\eta\leq\dfrac{1}{a}.\end{cases}$$

在间断 $\eta=\frac{1}{\sigma}$ 处，V_1 和 σ 满足如下的 Rankine-Hugoniot 条件

$$\begin{cases}\sigma(\rho_1u_1-\rho_0u_0)=\rho_1v_1-\rho_0v_0,\\ \sigma(\rho_1u_1^2+p_1-\rho_0u_0^2-p_0)=\rho_1u_1v_1-\rho_0u_0v_0,\\ \sigma(\rho_1u_1v_1-\rho_0u_0v_0)=\rho_1v_1^2+p_1-\rho_0v_0^2-p_0,\end{cases} \tag{2.2}$$

将式 (1.6) 和 (1.7) 代入式 (2.2), 得到波后 Chaplygin 气体的物理量为

$$\rho_1=\frac{\sqrt{M_0^2-1}+\tan\theta}{\sqrt{M_0^2-1}+(1-M_0^2)\tan\theta}, \tag{2.3}$$

$$p_1=-\frac{1}{M_0^2}\frac{\sqrt{M_0^2-1}+(1-M_0^2)\tan\theta}{\sqrt{M_0^2-1}+\tan\theta}, \tag{2.4}$$

$$v_1=-\sqrt{M_0^2-1}(u_1-1), \tag{2.5}$$

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{M_0^2-1}}. \tag{2.6}$$

当激波间断与直楔表面重合，此时满足 $\sigma=\frac{1}{\sqrt{M_0^2-1}}=\tan\theta$, 解得 $M_0=\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$, 称 $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$ 为来流 Mach 数的临界值，记为 M_0^*.

由式 (2.3) 知，当 $M_0\to M_0^*$ 时，成立

$$\lim_{M_0\to M_0^*}\rho_1=\lim_{M_0\to M_0^*}\frac{\sqrt{M_0^2-1}+\tan\theta}{\sqrt{M_0^2-1}+(1-M_0^2)\tan\theta}=\infty, \tag{2.7}$$

由此可见，当来流 Mach 数 M_0 趋于 M_0^* 时，密度趋于无穷，此时不能用积分弱解来刻画，所以在下文第 3 节我们引入 Radon 测度解的定义，把积分弱解进行了推广.

在第 4 节我们将详细地讨论来流 Mach 数 M_0 趋于三种极限情况：

$$M_0\to M_0^{*-}\ (\text{引理 4.1});\quad M_0\to\infty\ (\text{引理 4.2});\quad M_0\to 1^+\ (\text{引理 4.3}).$$

为方便后文讨论，我们先给出如下引理.

引理 2.1 方程 (1.2)(1.3)(1.5) 存在含激波的分片光滑解的条件为来流 Mach 数 M_0 满足 $1<M_0<\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$, 且波后的 Mach 数 $M_1>1$, 为超音速流.

证 若方程 (1.2)(1.3)(1.5) 存在积分弱解，则在间断处相应的 Rankine-Hugoniot 条件成立，由密度的非负性结合表达式 (2.3) 可知，来流 Mach 数 M_0 的范围为 $1<M_0<M_0^*$.

波后的 Mach 数：

$$M_1=\frac{q_1}{c_1}=\frac{\sqrt{u_1^2+v_1^2}}{\sqrt{\frac{\partial P_1}{\partial\rho_1}}}=\sqrt{u_1^2+(M_0^2-1)(u_1-1)^2}\rho_1M_0, \tag{2.8}$$

将式 (1.7) 和 (2.3) 代入式 (2.8), 得

$$M_1=\frac{M_0\sqrt{1+a^2}}{1-\sqrt{M_0^2-1}a}.$$

因为来流 Mach 数 M_0 的范围为 $1<M_0<\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$, 所以 $\frac{1}{M_0}-\sqrt{1-\frac{1}{M_0^2}}a\in(0,1)$, 于是

$$M_1=\frac{M_0\sqrt{1+a^2}}{1-\sqrt{M_0^2-1}a}=\frac{\sqrt{1+a^2}}{\frac{1}{M_0}-\sqrt{1-\frac{1}{M_0^2}}a}>\sqrt{1+a^2}\geq 1,$$

得出波后的 Mach 数 $M_1>1$, 为超音速流. ∎

引理 2.2 当来流 Mach 数趋于 M_0^{*-} 时，对于波后 Chaplygin 气体物理量，我们有下面的结果

$$\lim_{M_0\to M_0^{*-}} u_1=\frac{1}{1+a^2},\tag{2.9}$$

$$\lim_{M_0\to M_0^{*-}} v_1=\frac{a}{1+a^2},\tag{2.10}$$

$$\lim_{M_0\to M_0^{*-}} p_1=0,\tag{2.11}$$

$$\lim_{M_0\to M_0^{*-}}(1-a\sqrt{M_0^2-1})\rho_1=a^2+1,\tag{2.12}$$

$$\lim_{M_0\to M_0^{*-}}\rho_1(\sigma-a)=a^3+a,\tag{2.13}$$

$$\lim_{M_0\to M_0^{*-}}\frac{p_1}{\rho_1}=0.\tag{2.14}$$

证 因为 $M_0\to M_0^{*-}$ 时，极限过程没有奇性产生，所以根据文献 [5] 中的结论，可得式 (2.9) 和 (2.10).

对表达式 (2.3)(2.4), 直接取极限 $M_0\to M_0^{*-}$, 可得式 (2.11)(2.14).

结合式 (2.3) 和 (2.6), 得

$$\lim_{M_0\to M_0^{*-}}(1-a\sqrt{M_0^2-1})\rho_1=\lim_{M_0\to M_0^{*-}}\frac{(1-a\times\frac{1}{a})(\sqrt{M_0^2-1}+a)}{\sqrt{M_0^2-1}+(1-M_0^2)a}=0,$$

$$\lim_{M_0\to M_0^{*-}}\rho_1(\sigma-a)=\lim_{M_0\to M_0^{*-}}(\frac{1}{\sqrt{M_0^2-1}}-a)\times\frac{\sqrt{M_0^2-1}+\tan\theta}{\sqrt{M_0^2-1}+(1-M_0^2)\tan\theta}=a^3+a.$$

引理 2.2 得证. ∎

注 2.1 通过引理 2.2, 可知来流 Mach 数趋于 M_0^{*-} 时，激波斜率趋于楔面的斜率 a, 密度会趋于无穷.

综上，描述 Chaplygin 气体绕流问题的方程 (1.2)(1.3)(1.5) 存在分片常数 $V(\eta)$ 形式解的条件为来流 Mach 数 M_0 的范围为 $1<M_0<M_0^*$, 当 Mach 数 M_0 大于等于 M_0^* 时，该问题不存在分片常数的积分弱解，并且当 M_0 趋于 M_0^* 时，波后的密度趋于无穷，不仅如此，质量还会在楔面上形成集中现象．由此，我们考虑在 Radon 测度解的框架下来研究该问题解的存在性，并且证明上述积分弱解也是 Radon 测度解．在这个意义上， Radon 测度解是积分弱解的一个推广，并且确实可以解决利用积分弱解无法刻画的问题.

3 Radon 测度解及一般 M_0 的可解性

令 B 为 Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ 上的 Borel σ 代数，考虑 $(\mathbb{R}^2,B)$ 上的 Radon 测度，记做

$$\langle m,\phi\rangle=\int_{R^2}\phi(x,y)m(\mathrm{d}x\mathrm{d}y),\tag{3.1}$$

其中配对关系为 Radon 测度 m 和试验函数 $\phi\in C_0(\mathbb{R}^2)$, $\mu\ll\nu$ 表示 μ 关于 ν 绝对连续 (参看文献 [9–10]).

定义 3.1[5] 令 L 为 Lipschitz 曲线，其参数方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [0, T)$, $\omega_L(t) \in L^1_{loc}(0, T)$. 在 $L \subset R^2$ 上带有权重 w_L 的 Dirac 测度 [11] 由下述等式给出

$$\langle \omega_L \delta_L, \phi \rangle = \int_0^T \omega_L(t) \phi(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \mathrm{d}t, \quad \forall \phi \in C_0(\mathbb{R}^2). \tag{3.2}$$

定义 3.2[5] 对固定 Mach 数 M_0, $0 < M_0 \le \infty$, 令 $\varrho, m^0, m^1, m^2, n^0, n^1, n^2, \wp$ 为 $\overline{\Omega}$ 上的 Radon 测度， $\omega_p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \bigcup \{0\})$, 且 $\omega_p \ge 0$, 称 $(\varrho, u, v, \omega_p)$ 为方程 (1.2)(1.3)(1.5) 的 Radon 测度解，如果满足

i) ϱ 为非负 Radon 测度，使得 $\wp \ll \varrho, (m^0, n^0) \ll \varrho$, $(m^1, n^1) \ll (m^0, n^0)$, $(m^2, n^2) \ll (m^1, n^1)$, 且相应的 Radon-Nikodym 导数 ϱ-a.e. 意义下满足

$$u = \frac{m^0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)}{\varrho(\mathrm{d}x\mathrm{d}x)} = \frac{\frac{m^1(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)}{\varrho(\mathrm{d}x\mathrm{d}x)}}{\frac{m^0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)}{\varrho(\mathrm{d}x\mathrm{d}x)}} = \frac{\frac{n^1(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)}{\varrho(\mathrm{d}x\mathrm{d}x)}}{\frac{n^0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)}{\varrho(\mathrm{d}x\mathrm{d}x)}}, \tag{3.3}$$

$$v = \frac{n^0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)}{\varrho(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)} = \frac{\frac{m^2(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)}{\varrho(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)}}{\frac{m^0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)}{\varrho(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)}} = \frac{\frac{n^2(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)}{\varrho(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)}}{\frac{n^0(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)}{\varrho(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)}}, \tag{3.4}$$

ii) $\forall \phi \in C^1_0(\mathbb{R}^2)$, 成立

$$\langle m^0, \partial_x \phi \rangle + \langle n^0, \partial_y \phi \rangle + \int_0^\infty (\rho_0 u_0) \phi(0, y) \mathrm{d}y = 0, \tag{3.5}$$

$$\langle m^1, \partial_x \phi \rangle + \langle n^1, \partial_y \phi \rangle + \langle \wp, \partial_x \phi \rangle + \langle \omega_p n_1 \delta_w, \phi \rangle + \int_0^\infty (\rho_0 u_0^2 + p_0) \phi(0, y) \mathrm{d}y = 0, \tag{3.6}$$

$$\langle m^2, \partial_x \phi \rangle + \langle n^2, \partial_y \phi \rangle + \langle \wp, \partial_y \phi \rangle + \langle \omega_p n_2 \delta_w, \phi \rangle + \int_0^\infty (\rho_0 u_0 v_0) \phi(0, y) \mathrm{d}y = 0. \tag{3.7}$$

注 3.1 $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2) = \frac{(-a, 1)}{\sqrt{1+a^2}}$ 为直楔的单位内法向量.

引理 3.1 定义 3.2 中 Radon 测度解是定义 2.1 中积分弱解的推广.

证 由积分弱解的定义 (2.1) 式，变形得

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (F(U)\partial_x \phi + G(U)\partial_y \phi) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^\infty F(U_0)\phi(0, y)\mathrm{d}y \\ &-\int_0^\infty (aF(U|_w) - G(U|_w))\phi(x, ax)\mathrm{d}x = 0, \end{aligned}$$

结合散度定理 [12], 式 (2.1) 可改写为

$$\langle F(U), \partial_x \phi \rangle + \langle G(U), \partial_y \phi \rangle + \int_0^\infty F(U_0)\phi(0, y)\mathrm{d}y = 0,$$

这与定义 3.2 中 Radon 测度解的定义一致，由此可见，积分弱解也是 Radon 测度解，即定义 3.2 中 Radon 测度解是定义 2.1 中积分弱解的推广. ▮

由引理 2.1 知，方程 (1.2)(1.3)(1.5) 存在含激波的分片光滑解的条件为来流 Mach 数 M_0 满足 $1 < M_0 < \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$. 当来流 Mach 数大于等于 $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$ 时，不能用积分弱解表示，此时考虑 Radon 测度解.

下面我们给出当来流 Mach 数 M_0 大于等于临界 Mach 数 M_0^* 时，方程 (1.2)(1.3)(1.5) 的 Radon 测度解的存在性.

引理 3.2 来流 Mach 数 M_0 满足 $M_0 \geq M_0^* = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$ 时, 方程 (1.2)(1.3)(1.5) 存在 Radon 测度解.

证 要证明方程 (1.2)(1.3)(1.5) 存在 Radon 测度解，只需将其 Radon 测度解求解出来即完成证明.

设 I_Ω 为区域 Ω 上的特征函数，即 $I_\Omega(x,y) = \begin{cases} 1, (x,y) \in \Omega \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$. 令

$$m^0 = \rho_0 u_0 I_\Omega L^2 + w_m^0(x)\delta_w = I_\Omega L^2 + w_m^0(x)\delta_w, \tag{3.8}$$

$$n^0 = \rho_0 v_0 I_\Omega L^2 + w_n^0(x)\delta_w = w_n^0(x)\delta_w, \tag{3.9}$$

$$\wp = -\frac{1}{M_0^2} I_\Omega L^2, \tag{3.10}$$

$$m^1 = I_\Omega L^2 + w_m^1(x)\delta_w, \tag{3.11}$$

$$n^1 = w_n^1(x)\delta_w, \tag{3.12}$$

$$m^2 = w_m^2(x)\delta_w, \tag{3.13}$$

$$n^2 = w_n^2(x)\delta_w, \tag{3.14}$$

其中， $w_m^0(x), w_m^1(x), w_m^2(x), w_n^0(x), w_n^1(x), w_n^2(x)$ 为待定函数.

将式 (3.8)(3.9) 代入式 (3.5), 得

$$\begin{aligned} &-\sqrt{1+a^2} w_m^0(0)\phi(0,0) + a\int_0^\infty \phi(x,ax)\mathrm{d}x + \sqrt{1+a^2}\int_0^\infty (-a w_m^0(x) + w_n^0(x))\partial_y \phi(x,ax)\mathrm{d}x \\ &-\sqrt{1+a^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w_m^0(x)\phi(x,ax)\mathrm{d}x = 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

由 ϕ 的任意性，得

$$\begin{cases} w_n^0(x) = a w_m^0(x), \\ a = \sqrt{1+a^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w_m^0(x), \\ w_m^0(0) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} w_m^0(x) = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} x, \\ w_n^0(x) = \dfrac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} x. \end{cases} \tag{3.16}$$

类似地，将式 (3.10)(3.11)(3.12) 代入式 (3.6), 得

$$\begin{cases} w_n^1(x) = a w_m^1(x), \\ a(1 - \dfrac{1}{M_0^2}) + \sqrt{1+a^2} w_p n_1 = \sqrt{1+a^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w_m^1(x), \\ w_m^1(0) = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

将式 (3.10)(3.13)(3.14) 代入式 (3.7), 得

$$\begin{cases} w_m^2(0)=0, \\ \dfrac{1}{M_0^2}+\sqrt{1+a^2}[w_p n_2-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w_m^2(x)]=0, \\ w_n^2(x)=aw_m^2(x), \end{cases} \tag{3.18}$$

利用直楔上的滑移条件 (1.3), 结合式 (3.17)(3.18), 得到

$$\begin{cases} w_m^1(x)=\dfrac{ax}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}, \\ w_m^2(x)=\dfrac{a^2x}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}, \\ w_p(x)=\dfrac{a^2}{1+a^2}-\dfrac{1}{M_0^2}, \\ w_n^1(x)=\dfrac{a^2x}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}, \\ w_n^2(x)=\dfrac{a^3x}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}. \end{cases} \tag{3.19}$$

综上，描述 Chaplygin 气体绕流问题的方程 (1.2)(1.3)(1.5) 的 Radon 测度解的密度测度为

$$\varrho=I_\Omega L^2+a\sqrt{1+a^2}x\delta_w, \tag{3.20}$$

速度为

$$u=I_\Omega+\frac{1}{1+a^2}I_w, \tag{3.21}$$

$$v=\frac{a}{1+a^2}I_w. \tag{3.22}$$

于是方程 (1.2)(1.3)(1.5) 的 Radon 测度解的存在性得证. ▍

4 几类极限的讨论

在第 3 节中, 我们讨论了描述 Chaplygin 气体绕流问题方程的 Radon 测度解及一般 Mach 数 M_0 的可解性，本节将详细地讨论来流 Mach 数 M_0 趋于三种极限状态情况： $M_0\to M_0^{*-}$ (引理 4.1), $M_0\to\infty$ (引理 4.2), $M_0\to 1^+$ (引理 4.3).

引理 4.1 来流 Mach 数 $M_0\to M_0^{*-}$ 时，方程 (1.2)(1.3)(1.5) 通过积分弱解的定义取极限得到的结果与构造方法得到的 Radon 测度解结果相同， Radon 测度解弱收敛到密度包含 Dirac 测度的奇异测度解，其中 Dirac 测度的支撑在直楔表面.

证 由第 2 节可知，对任意试验函数 $\phi\in C_0(\mathbb{R}^2)$, 由于 $\eta=\frac{x}{y}$, 有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{a}}\rho v\phi(\eta)\mathrm{d}\eta &=\int_0^{\frac{1}{\sigma}}\rho_0v_0\phi(\eta)\mathrm{d}\eta+\int_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{1}{a}}\rho_1v_1\phi(\eta)\mathrm{d}\eta \\ &=\int_0^{\frac{1}{\sigma}}\phi(\eta)\mathrm{d}\eta+\rho_1v_1\int_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{1}{a}}\phi(\eta)\mathrm{d}\eta. \end{aligned} \tag{4.1}$$

由于 $\lim\limits_{M_0\to M_0^{*-}}\sigma=a$, 所以

$$\lim_{M_0\to M_0^{*-}}\int_0^{\frac{1}{\sigma}}\phi(\eta)\mathrm{d}\eta=\int_0^{\frac{1}{a}}\phi(\eta)\mathrm{d}\eta, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{M_0\to M_0^{*-}}\rho_1v_1\int_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{1}{a}}\phi(\eta)\mathrm{d}\eta&=\lim_{M_0\to M_0^{*-}}\rho_1v_1(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sigma})\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{\sigma}}\int_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{1}{a}}\phi(\eta)\mathrm{d}\eta\\&=\frac{(a^3+a)\frac{a}{1+a^2}}{a^2}\phi(\frac{1}{a})=\phi(\frac{1}{a}).\end{aligned} \tag{4.3}$$

令 $\psi(x,y)\in C_0(\mathbb{R}^2)$, 满足 $\phi(\eta,y)=\psi(\eta y,y)$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{M_0\to M_0^{*-}}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{1}{a}}\rho v\psi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{\infty}\lim_{M_0\to M_0^{*-}}\int_0^{\frac{1}{a}}\rho v\phi(\eta,y)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{1}{a}}\phi(\eta,y)y\mathrm{d}\eta\mathrm{d}y+\int_0^{\infty}\phi(\frac{1}{a},y)y\mathrm{d}y\\&=\int_{\Omega}\rho_0v_0\psi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^{\infty}a^2x\psi(x,ax)\mathrm{d}x\\&=\int_{\Omega}\rho_0v_0\psi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^{\infty}w_n^0(x)\sqrt{1+a^2}\psi(x,ax)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

得到

$$w_n^0(x)=\frac{a^2x}{\sqrt{1+a^2}}, \tag{4.4}$$

同理，可得

$$w_n^1(x)=\frac{a^2x}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}, \tag{4.5}$$

$$w_n^2(x)=\frac{a^3x}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}, \tag{4.6}$$

这与第 3 节中求得的式 (3.16) 和 (3.19) 一致.

其次，由压强的关系 (1.6)–(1.7), 知

$$p(x,y)=\begin{cases}p_0=-\dfrac{1}{M_0^2,}\ 0\le\dfrac{x}{y}<\dfrac{1}{\sigma},\\ p_1,\qquad\qquad \dfrac{1}{\sigma}<\dfrac{x}{y}\le\dfrac{1}{a}.\end{cases} \tag{4.7}$$

当 $M_0\to M_0^{*-}$ 时，有 $p_0\to-\frac{a^2}{a^2+1},p_1\to 0,p\to-\frac{a^2}{a^2+1}$, 在上述测度收敛意义下成立，于是得到

$$\lim_{M_0\to M_0^{*-}}\rho_0v_0=0,$$

$$\lim_{M_0\to M_0^{*-}}\rho_0u_0v_0=0,$$

$$\lim_{M_0\to M_0^{*-}}\rho_0v_0^2+p_0=-\frac{a^2}{a^2+1}.$$

对式 (4.4)–(4.6) 关于 $M_0 \to M_0^{*-}$ 取极限，得

$$(n^0(M_0), n^1(M_0), n^2(M_0)) \to (n^0, n^1, n^2). \tag{4.8}$$

同理，可得

$$(m^0(M_0), m^1(M_0), m^2(M_0)) \to (m^0, m^1, m^2). \tag{4.9}$$

令

$$\begin{cases} m^0 = \rho_1 u_1 L^2, n^0 = \rho_1 v_1 L^2, \\ m^1 = \rho_1 u_1^2 L^2, n^1 = \rho_1 u_1 v_1 L^2, \\ m^2 = \rho_1 u_1 v_1 L^2, n^2 = \rho_1 v_1^2 L^2, \\ \wp = p_1 L^2, \\ w_p n_1 = \dfrac{-a}{\sqrt{1+a^2}} p_1, \\ w_p n_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} p_1. \end{cases}$$

则式 (2.1) 可以改写为

$$\langle m^0, \partial_x \phi\rangle + \langle n^0, \partial_y \phi\rangle + \int_0^\infty \phi(0,y)\mathrm{d}y = 0, \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} &\langle m^1, \partial_x \phi\rangle + \langle n^1, \partial_y \phi\rangle + \langle \wp, \partial_x \phi\rangle - \int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} p_1 \phi(x,ax)\sqrt{1+a^2}\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^\infty (1+p_0)\phi(0,y)\mathrm{d}y = 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\langle m^2, \partial_x \phi\rangle + \langle n^2, \partial_y \phi\rangle + \langle \wp, \partial_x \phi\rangle + \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} p_1 \phi(x,ax)\sqrt{1+a^2}\mathrm{d}x = 0. \tag{4.12}$$

由于 $\langle \wp, \phi\rangle = \int_\Omega p\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 所以 $\langle \wp, \phi\rangle \to -\frac{a^2}{a^2+1}\int_\Omega \phi \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$, 得到

$$-\int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} p_1 \phi(x,ax)\sqrt{1+a^2}\mathrm{d}x \to \langle w_p n_1 \delta_w, \phi\rangle, \tag{4.13}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} p_1 \phi(x,ax)\sqrt{1+a^2}\mathrm{d}x \to \langle w_p n_2 \delta_w, \phi\rangle. \tag{4.14}$$

根据式 (4.8)–(4.9), 当 $M_0 \to M_0^{*-}$ 时，式 (3.5)–(3.7) 成立. ▮

注 4.1 由第 1 节可知, 楔面的斜率 $a = \tan\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 表示楔面的倾角, 当 $\theta = 0$ 时, $a = 0$, 此时 $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} = \infty$, 该情形归结为下文引理 4.2; 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时， $a = \infty$, 此时 $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} = 1$, 该情形归结为下文引理 4.3.

引理 4.2 来流 Mach 数 $M_0 \to \infty$ 时，得到极限流

$$\begin{cases} \varrho = I_\Omega L^2 + a\sqrt{1+a^2} x \delta_w, \\ u = I_\Omega + \dfrac{1}{1+a^2} I_w, \\ v = \dfrac{a}{1+a^2} I_w, \\ p = \dfrac{a^2}{1+a^2}. \end{cases}$$

证 当 $M_0 \geq M_0^*$ 时，不存在积分弱解意义下形如 $V(\eta)$ 的分片常数解，此时考虑 Radon 测度解．按照第 3 节中定义 3.2 构造 Radon 测度解，经过计算，得到如下结果

$$\begin{cases} w_m^0(x) = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}x, \\ w_n^0(x) = \dfrac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}x, \\ w_m^1(x) = \dfrac{ax}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}, \\ w_n^1(x) = \dfrac{a^2x}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}, \\ w_m^2(x) = \dfrac{a^2x}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}, \\ w_n^2(x) = \dfrac{a^3x}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}, \\ w_p(x) = \dfrac{a^2}{1+a^2} - \dfrac{1}{M_0^2}. \end{cases} \tag{4.15}$$

当 $M_0 \to \infty$ 时，有

$$w_p(x) \to \frac{a^2}{1+a^2},$$

$$\begin{cases} w_n^0(x) \to \dfrac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}x, \\ w_n^1(x) \to \dfrac{a^2}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}x, \\ w_n^2(x) \to \dfrac{a^3}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}x. \end{cases} \tag{4.16}$$

$$\begin{cases} w_m^0(x) \to \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}x, \\ w_m^1(x) \to \dfrac{a}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}x, \\ w_m^2(x) \to \dfrac{a^2}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}x. \end{cases} \tag{4.17}$$

该结果与文献 [5] 中多方气体的结果一致． ▍

注 4.2 通过引理 4.2, 可知来流 Mach 数 M_0 趋于无穷时，在定义 3.2 Radon 测度解意义下得到极限流，结果与文献 [5] 中多方气体结果相同．

引理 4.3 来流 Mach 数 $M_0 \to 1^+$ 时，激波斜率趋于无穷，此时激波极限位置垂直于来流，得到密度趋于无穷的静止气体．

证 当来流 Mach 数 M_0 趋于 1^+ 时，我们有如下的结果

$$\lim_{M_0 \to 1^+} u_1 = 0, \tag{4.18}$$

$$\lim_{M_0 \to 1^+} v_1 = 0, \tag{4.19}$$

$$\lim_{M_0 \to 1^+} p_1 = 0, \tag{4.20}$$

$$\lim_{M_0\to 1^+}\sqrt{M_0^2-1}\rho_1=a, \tag{4.21}$$

$$\lim_{M_0\to 1^+}\frac{p_1}{\rho_1}=0, \tag{4.22}$$

$$\lim_{M_0\to 1^+}\frac{1}{\sigma}=0. \tag{4.23}$$

由式 (2.5) 得

$$\lim_{M_0\to 1^+}v_1=\lim_{M_0\to 1^+}-\sqrt{M_0^2-1}(u_1-1)=0,$$

又由滑移条件 (1.3) 知， v 和 u 为同阶量，所以式 (4.18)(4.19) 成立.

对表达式 (2.4), 直接取极限 $M_0\to 1^+$, 可得式 (4.20).

$$\lim_{M_0\to 1^+}\sqrt{M_0^2-1}\rho_1=\lim_{M_0\to 1^+}\sqrt{M_0^2-1}\times\frac{\sqrt{M_0^2-1}+a}{\sqrt{M_0^2-1}(1-\sqrt{M_0^2-1}a)}=a,$$

由式 (2.3)–(2.4) 知

$$\lim_{M_0\to 1^+}\frac{p_1}{\rho_1}=\lim_{M_0\to 1^+}\frac{-(a\sqrt{M_0^2-1}-1)^2(M_0^2-1)}{M_0^2(\sqrt{M_0^2-1}+a)^2}=0,$$

由式 (2.6) 知

$$\lim_{M_0\to 1^+}\frac{1}{\sigma}=\lim_{M_0\to 1^+}\frac{v_1}{1-u_1}=\lim_{M_0\to 1^+}\sqrt{M_0^2-1}=0,$$

此时激波斜率趋于无穷，激波极限位置垂直于来流.

由式 (4.1) 知

$$\int_0^{\frac{1}{a}}\rho v\phi(\eta)\mathrm{d}\eta=\int_0^{\frac{1}{\sigma}}\phi(\eta)\mathrm{d}\eta+\rho_1v_1\int_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{1}{a}}\phi(\eta)\mathrm{d}\eta, \tag{4.24}$$

而 $\lim\limits_{M_0\to 1^+}\frac{1}{\sigma}=0$, 所以得到

$$\lim_{M_0\to 1^+}\int_0^{\frac{1}{a}}\rho v\phi(\eta)\mathrm{d}\eta=\lim_{M_0\to 1^+}\rho_1v_1\int_0^{\frac{1}{a}}\phi(\eta)\mathrm{d}\eta.$$

由式 (2.3) 和 (2.5) 得

$$\lim_{M_0\to 1^+}\rho_1v_1=\lim_{M_0\to 1^+}\frac{\sqrt{M_0^2-1}+a}{\sqrt{M_0^2-1}(1-\sqrt{M_0^2-1}a)}[-\sqrt{M_0^2-1}(u_1-1)]=a,$$

所以

$$\lim_{M_0\to 1^+}\int_0^{\frac{1}{a}}\rho_1v_1\phi(\eta)\mathrm{d}\eta=a\int_0^{\frac{1}{a}}\phi(\eta)\mathrm{d}\eta.$$

进而

$$\lim_{M_0\to 1^+}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{1}{a}}\rho_1v_1\psi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{1}{a}}\rho_1v_1\phi(\eta,y)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= a\int_0^\infty \int_0^{\frac{1}{a}} y\phi(\eta y, y)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}y \\
&= a\int_0^\infty \int_0^{\frac{1}{a}} a^2 x\psi(a^2x^2\eta, ax)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \int_0^{\frac{1}{a}} w_n^0(x)\sqrt{1+a^2}\psi(a^2x^2\eta, ax)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

得到

$$
w_n^0(x) = \frac{a^3 x}{\sqrt{1+a^2}},
$$

又因为

$$
\lim_{M_0\to 1^+} \rho_1 u_1 v_1 = 0, \quad \lim_{M_0\to 1^+} \rho_1 v_1^2 + p_1 = 0,
$$

同理，将上述过程中 $\rho_1 v_1$ 换为 $\rho_1 u_1 v_1$, $\rho_1 v_1^2 + p_1$, 得到

$$
w_n^1(x) = w_n^2(x) = 0.
$$

由式 (2.3) 知

$$
\lim_{M_0\to 1^+} \rho_1 = \lim_{M_0\to 1^+} \frac{\sqrt{M_0^2-1}+\tan\theta}{\sqrt{M_0^2-1}+(1-M_0^2)\tan\theta} = \infty,
$$

此时密度趋于无穷，又因为

$$
\lim_{M_0\to 1^+} \rho_1 u_1 = \lim_{M_0\to 1^+} \rho_1 \frac{v_1}{a} = 1, \quad \lim_{M_0\to 1^+} \rho_1 u_1^2 + p_1 = 0,
$$

同上述过程类似，可得

$$
w_m^0(x) = \frac{a^2 x}{\sqrt{1+a^2}}, \quad w_m^1(x) = w_m^2(x) = 0.
$$

所以，当来流 Mach 数 $M_0 \to 1^+$ 时，得到密度趋于无穷的静止气体. ∎

注 4.3 通过引理 4.3, 可知来流 Mach 数 M_0 趋于 1^+ 时，激波斜率趋于无穷，激波极限位置垂直于来流，波后 Chaplygin 气体静止.

5 主要结果

根据前面的讨论，可以总结得到如下定理：

定理 5.1 当来流 Mach 数 $M_0 > 1$ 时, 描述 Chaplygin 气体绕流问题方程 (1.2)(1.3)(1.5) 存在 Radon 测度解. 特别地

来流 Mach 数 M_0 范围为 $1 < M_0 < M_0^*$ 时，此时 $\sigma < a = \tan\theta$, 方程 (1.2)(1.3)(1.5) 存在定义 2.1 积分弱解意义下间断解，且波后的 Mach 数恒大于 1, 为超音速流. 进一步，当 $M_0 \to 1^+$ 时，得到密度趋于无穷的静止气体.

来流 Mach 数 $M_0 \geq M_0^*$ 时，方程 (1.2)(1.3)(1.5) 存在 Radon 测度解，且当 $M_0 \to M_0^{*-}$ 时，通过定义 2.1 积分弱解取极限得到的结果与构造方法得到的 Radon 测度解结果相同，Radon 测度解弱收敛到密度包含 Dirac 测度的奇异测度解，其中 Dirac 测度的支撑在直楔表面. 进一步，当 $M_0 \to \infty$ 时，得到极限流，与文献 [5] 中多方气体结果相同.

致谢 本文作者感谢华东师范大学袁海荣教授和上海师范大学屈爱芳教授在写作过程中的讨论、鼓励和帮助.

参 考 文 献

[1] Chaplygin S. On gas jets. Sci Men Moscow Univ Math Phys, 1904, **21**: 1–121

[2] Serre D. Multidimensional shock interaction for a Chaplygin gas. Arch Rational Mech Anal, 2009, **191**: 539–577

[3] Setare M R. Holographic Chaplygin gas model. Phys Lett B, 2007, **648**: 329–332

[4] Qu A F, Yuan H R. Measure solutions of one-dimensional piston problem for compressible Euler equations of Chaplygin gas. J Math Anal Appl, 2020, **481**(1): 123468

[5] Qu A F, Yuan H R, Zhao Q. Hypersonic limit of two-dimensional steady compressible Euler flows passing a straight wedge. Z Angew Math Mech, 2020, **100**(3): e201800225

[6] Lax P. Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves. Philadelphia: SIAM, 1973

[7] Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. New York: Springer-Verlag, 1994

[8] Bressan A. Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One-Dimensional Cauchy Problem. Oxford: Oxford University Press, 2000

[9] Rudin W. Real and Complex Analysis. New York: McGraw-Hill, 1974

[10] Folland G B. Real Analysis, Pure and Applied Mathematics. New York: John Wiley-Sons, 1999

[11] Hormander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators. New York: Springer-Verlag, 1983

[12] Evans L C. Partial Differential Equations. New York: American Mathematical Society, 2010

The Two-Dimensional Steady Chaplygin Gas Flows Passing a Straight Wedge

Jia Jia

(*School of Mathematical Sciences, East China Normal University, Shanghai 200241*)

Abstract: The purpose of this paper is to investigate the two-dimensional steady supersonic chaplygin gas flows passing a straight wedge. By the definition of Radon measure solution, the accurate expressions are obtained for all cases where the Mach number is greater than 1. It is quite different from the polytropic gas, for the chaplygin gas flows passing problems, there exists a Mach number M_0^*, when the Mach number of incoming flows is greater than or equal to M_0^*, the quality will be concentrated on the surface of the straight wedge. At this time, there are not piecewise smooth solutions in the Lebesgue sense. The limit analysis is used to prove that the limit obtained by Lebesgue integral is consistent with the solution obtained in the sence of Radon measure solution.

Key words: Chaplygin gas; Radon measure solution; Riemann problem; Hypersonic limit.

MR(2010) Subject Classification: 35L65; 35Q35; 76J20