



2021, 41A(4):1147–1165

*Acta
Mathematica
Scientia*
数学物理学报

<http://actams.wipm.ac.cn>

模糊厌恶下最小 Drawdown 概率的最优投资再保险策略

赵玉莹 温玉珍*

(曲阜师范大学统计学院 山东曲阜 273165)

摘要: 该文考虑了模糊厌恶下保险公司的最优投资和再保险问题, 得到了保险市场和金融市场均存在模糊厌恶时, 保险公司盈余的最小 drawdown 概率及其最优鲁棒投资和再保险策略的解析解. 通过数值分析得出一些重要参数对值函数的影响.

关键词: 模糊厌恶; drawdown 概率; 最优鲁棒投资再保险策略; 扭曲漂移.

MR(2010) 主题分类: 91B30; 93D09 **中图分类号:** O224; F224.9 **文献标识码:** A

文章编号: 1003-3998(2021)04-1147-19

1 引言

近年来许多学者对保险公司的最优投资和再保险问题进行了研究, 见文献 [1–4]. 上述文献是在确定保险市场及金融市场模型的基础上研究的. 也就是说, 投资者对保险市场和风险资产价格的演变和分布有一定的把握. 这是不现实的. 由于保险及金融市场存在多种不可控风险和信息技术的有限性, 所以保险公司会对保险及金融市场存在模糊性. 这里的模糊性指的是概率测度的模糊性, 即构建保险市场和金融市场模型时的概率测度(一般称为参考概率)存在某些不可避免的偏差. 那么需要我们找到合理的概率测度(一般称为替代概率)来代替参考概率. 模糊厌恶优化问题的早期工作, 例如文献 [5] 研究了模糊厌恶下期望效用最大化的最优投资消费. 文献 [6] 也通过控制方法来研究模糊厌恶下有限水平效用最大化问题. 文献 [7–8] 研究模糊厌恶下最大化保险公司的终端财富期望效用, 得出保险公司最优投资和保费策略的解析解. 文献 [9] 研究了模糊厌恶下的最小化个人生存破产概率, 其中假设个人的死亡时间服从一个指数分布, 目标函数是最小化个人生存破产概率, 得到了模糊厌恶下最优鲁棒投资策略. 该文从一个全新的角度分析了模型不确定对投资决策的影响, 给我们研究模糊问题提供了一个全新的思路.

最小化破产概率是另一个重要的研究课题, 并且在过去几十年中得到了广泛研究, 例如文献 [10–12]. 这些文献及其参考文献大多对破产概率最小化问题进行各种研究. 但在实际

收稿日期: 2020-10-22; 修订日期: 2021-02-03

E-mail: zhaoyuying95@163.com; wenyzhen@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(11501319)、中国博士后科学基金(2015M582064)和山东省自然科学基金(ZR-2020MA035, ZR2015AL013)

Supported by the NSFC(11501319), the China Postdoctoral Science Foundation(2015M582064) and the NSF of Shandong Province(ZR2020MA035, ZR2015AL013)

* 通讯作者

的金融市场中，投资者更喜欢将其盈余过程的价值维持在某一确定的正水平，或者更高水平比如迄今为止最大价值的固定比例。因此产生了最小 drawdown 概率，即盈余过程的价值下降到迄今为止其最大值的固定比例以下的概率。最近，文献 [13–14] 研究了无限期范围内的最小 drawdown 概率问题，并表明如果 drawdown 不发生，最小破产概率的最优策略也将 drawdown 概率最小化。此外，文献 [15] 也研究了终生投资问题，旨在最小化 drawdown 发生的风险，发现针对生命周期下降的最优策略和相应的破产问题与前者明显不同。文献 [16] 研究了危险区间和安全区间保险公司的投资再保问题，得出危险区间的最小 drawdown 概率。

受上述文献启发，本文以最小 drawdown 概率为研究目标，研究模糊厌恶下的最优鲁棒投资和再保险。我们应用最优控制理论解决最优问题，得到最优鲁棒投资和再保险策略的解析解，以及相应鲁棒情形下的最小 drawdown 概率。本文的其余部分安排如下，在第二节介绍模型和优化问题；第三节主要是给出优化问题的验证定理，对模糊厌恶优化问题进行求解；第四节讨论解析解的规律性质；第五节利用几个数值例子分析不同参数对最小 drawdown 概率和漂移扭曲的影响；最后是结论和展望。

2 模型设定

2.1 保险金融市场的模型假设

假设带漂移的 Brown 运动服从分布

$$dC_t = adt - bdW_t, \quad (2.1)$$

其中 a 和 b 为正常数， W_t 为带流概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 的标准布朗运动。盈余过程 U_t 为

$$\begin{cases} dU_t = cdt - dC_t = a\theta dt + bdW_t, \\ U_0 = u, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $c = (1 + \theta)a$ 为保费率。

假设金融市场存在一个无风险资产和一个风险资产且无风险资产的价格过程为

$$dP_t = rP_t dt, \quad r > 0,$$

其中 r 为无风险利率。风险资产的价格过程 S_t 满足

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t^S, \quad (2.3)$$

其中 $\sigma > 0, \mu > r$, $\{B_t^S\}$ 为 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 下的标准 Brown 运动且与 $\{W_t\}$ 独立。 π_t 为 t 时刻保险公司投资于风险资产的金额。

另允许保险公司购买比例再保险， q_t 表示 t 时刻的再保险保留水平。假设再保险的安全系数为 η , $\eta > \theta$, 且 $q_t \in [0, 1]$ 。

设 π_t 为 t 时刻投资于风险资产的资金数量， q_t 为 t 时刻再保险保留水平。保险公司引进投资再保险的盈余过程为

$$\begin{cases} dU_t^{\pi, q} = [rU_t^{\pi, q} + (\mu - r)\pi_t + (q_t\eta - \eta + \theta)a]dt + \sigma\pi_t dB_t^S + q_t b dW_t, \\ U_0^{\pi, q} = u. \end{cases} \quad (2.4)$$

(π_t, q_t) 是可容许的. 下面我们给出可容许策略的定义.

定义 2.1 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是完备的概率空间, 其中 \mathcal{F}_t 是由 $U_s^{\pi, q} (0 \leq s \leq t)$ 生成的 σ -代数. 如果策略 (π_t, q_t) 满足

- (1) π_t, q_t 是 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 逐步可测的;
- (2) $q_t \in [0, 1]$;
- (3) (2.4) 式关于 $U_t^{\pi, q}$ 有唯一的强解.

则称 (π_t, q_t) 是可容许的, 将可容许策略集记为 \mathcal{D} .

2.2 Drawdown 概率

定义 t 时刻的最大盈余值 M_t 为

$$M_t = \max \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} U_s^{\pi, q}, M_0 \right\}, \quad (2.5)$$

其中 $M_0 = m > 0$. 注意我们允许盈余过程具有过去的财务状况, 并且 m 不小于定义中的初始盈余, 即 $m \geq u$. 这里的 drawdown 一词是指盈余过程的价值达到其最大值 M_t 的 $\alpha \in [0, 1]$ 倍. 定义相应的击中时

$$\tau_\alpha = \inf \{t \geq 0 : U^{\pi, q}(t) \leq \alpha M_t\}. \quad (2.6)$$

即保险公司的盈余首次跌至或低于 αM_t 的时刻. 不难发现 τ_0 即为固定破产水平为 0 时的破产时刻. 此外, 类似文献 [13] 定义安全水平

$$u_s = \frac{(\eta - \theta)a}{r}. \quad (2.7)$$

如果盈余价值不低于 u_s , 保险公司可以转移所有风险并且不进行风险投资, 剩余价值将永远不会减少, 因此在这种情况下 drawdown 不会发生.

2.3 保险金融市场的模糊性与目标函数

概率测度 P 是由保险公司的一些数据和技术估计出来的, 因此不可避免地会存在一些偏差. 本文假设 P 关于保险市场和金融市场均不确定, 为更加准确地做出决策, 保险公司应该考虑其他的概率测度, 因此称 P 为参考测度或参考模型, 其他测度也就是替代概率测度. 由于 P 非常具有参考价值, 故而考虑的替代测度必须满足与 P 等价, 定义满足条件的替代概率测度的集合

$$\mathcal{Q} := \{Q | Q \sim P\}. \quad (2.8)$$

记 $h(Q \| P) = E^Q[\ln \frac{dQ}{dP}]$ 为相对熵函数, 表示对测度 P 的惩罚.

由于 $Q \in \mathcal{Q}$ 与 P 等价, 应用 Girsanov 定理, Q 应满足

$$\frac{dQ_{[0,T]}}{dP_{[0,T]}} = \Lambda_1(T) \cdot \Lambda_2(T), \quad (2.9)$$

其中

$$\Lambda_1(t) = \exp \left\{ \int_0^t \beta_s dB_s^S - \frac{1}{2} \int_0^t \beta_s^2 ds \right\},$$

$$\Lambda_2(t) = \exp \left\{ \int_0^t \gamma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s^2 ds \right\}$$

是一个域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ 的 P -鞅, β_t, γ_t 可料并满足 Novikov 条件, 即

$$E^P \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T [\beta(s)]^2 ds \right) \right] < \infty, \quad (2.10)$$

$$E^P \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T [\gamma(s)]^2 ds \right) \right] < \infty. \quad (2.11)$$

根据 Girsanov 定理, 测度 P 下的标准布朗运动 B_t^S, W_t 可以表示为

$$dB_t^S = \beta(t)dt + dB_t^Q, \quad (2.12)$$

$$dW_t = \gamma(t)dt + dW_t^Q, \quad (2.13)$$

其中 B_t^Q, W_t^Q 为 Q 下的标准布朗运动.

我们将 (2.12)–(2.13) 式代入到 (2.4) 式得到测度 Q 下保险公司的盈余过程

$$\begin{cases} dU_t^{\pi, q, Q} = [rU_t^{\pi, q, Q} + (\mu + \sigma\beta(t) - r)\pi_t + (q_t\eta - \eta + \theta)a + q_t\gamma(t)b]dt \\ \quad + \sigma\pi_t dB_t^Q + q_t b dW_t^Q, \\ U^{\pi, q, Q}(0) = u. \end{cases} \quad (2.14)$$

为了考虑替代概率测度 Q , 我们用相对熵来度量替代模型和参考模型之间的差距, Q 和 P 之间的相对熵为

$$\begin{aligned} h_{[0, t]}(Q \| P) &= E_{[0, t]}^Q \left[\ln \frac{dQ}{dP} \right] \\ &= E^Q \left[\int_0^t \beta_s dB_s^S - \frac{1}{2} \int_0^t \beta_s^2 ds \right] + E^Q \left[\int_0^t \gamma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s^2 ds \right] \\ &= E^Q \left[\int_0^t \beta_s dB_s^Q + \frac{1}{2} \int_0^t \beta_s^2 ds \right] + E^Q \left[\int_0^t \gamma_s dW_s^Q + \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s^2 ds \right]. \end{aligned}$$

由于 B_t^Q, W_t^Q 在 Q 下为标准布朗运动, 则有

$$h_{[0, t]}(Q \| P) = E^Q \left[\int_0^t \frac{1}{2} \beta_s^2 ds + \int_0^t \frac{1}{2} \gamma_s^2 ds \right] := E^Q \left[\int_0^t [Z_1(s) + Z_2(s)] ds \right],$$

其中 $Z_1(s) = \frac{1}{2}\beta_s^2$, $Z_2(s) = \frac{1}{2}\gamma_s^2$. 所以 $Z_1(t), Z_2(t)$ 度量了 $h_{[0, t]}(Q \| P)$. 如果保险公司拒绝了 P 而使用 Q , 那么惩罚就会发生. 这是由于 P 虽然存在不确定性, 但是非常具有参考价值, 所以不使用 P 会产生惩罚. 自然地, $h_{[0, t]}(Q \| P)$ 越大, 惩罚会越大.

本文的目的是在鲁棒意义上使保险公司的盈余跌至或低于 $\alpha M(t)$ 的概率降到最低, 鲁棒优化问题为

$$\psi(u, m, \varepsilon) = \inf_{\pi, q \in \mathcal{D}} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ Q_u(\tau_\alpha < \infty) - \frac{1}{\varepsilon} h(Q \| P) \right\}. \quad (2.15)$$

下标 u 表示条件 $U_0^{\pi, q} = u$. 参数 ε 衡量保险公司对模糊性 (模型不确定性) 的厌恶程度或对鲁棒性的偏好. $\varepsilon \downarrow 0$ 对应于经典的非鲁棒情况, 因为除 P 之外的所有测度都将给出非负的期望值, 因此对于内部最大化问题不是最优的. \sup 表示保险公司对模型不确定性的厌恶, 意思是当保险公司面对模型不确定时, 保险公司是保守的, 会考虑最差的情形的. ε 越

大表示保险公司越容易避免模糊性, 对参考模型的信心较小, 并且会考虑较大的漂移失真. $\varepsilon \rightarrow +\infty$ 对应于最坏情况的方法, 即保险公司对所有候选测度具有相同的信念, 并再次优化最坏情况的情况.

将 $h_{[0,t]}(Q \parallel P)$ 的表达式代入 (2.15) 式, 并在 τ_α 的分布下得到模糊厌恶下最小 drawdown 概率的值函数.

定义 2.2 (鲁棒值函数)

$$\psi(u, m, \varepsilon) = \inf_{\pi, q \in \mathcal{D}} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^Q \left[1_{\{\tau_\alpha < \infty\}} - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau_\alpha} \left(\frac{1}{2} \beta_s^2 + \frac{1}{2} \gamma_s^2 \right) ds \right].$$

3 模糊厌恶下的最小 Drawdown 概率

当模糊厌恶水平 $\varepsilon = 0$ 时, $\psi(u, m, 0)$ 为即非鲁棒值函数, 具体解析解参见文献 [16]; 当 ε 变大时 ψ 是非减的; 当 $\varepsilon = \infty$ 时, 有

$$\psi(u, m, \infty) = \inf_{\pi, q \in \mathcal{D}} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} Q_u(\tau_\alpha < \infty).$$

此时惩罚项完全消失, 这样由 Girsanov 定理得出的 (2.12) 式和 (2.13) 式中的漂移项系数 $\beta(t), \gamma(t)$ 无论正负都可以. 惩罚项的消失使得之前对 $\beta(t)$ 的约束消失, 假如 $\beta(t)$ 为负, 观察 (2.14) 式发现投资项系数为负, 即投资没有达到收益的目的反而使得财富值变少. 同理 $\gamma(t)$ 为负时不当的再保险策略也会造成财富损失. 因此最优投资策略是根本不投资, 而最优再保险保留水平为 0, 即转移全部风险. 此时盈余过程变为

$$d\hat{U}_t = [r\hat{U}_t - (\eta - \theta)a]dt, \quad \hat{U}_0 = u.$$

经过简单计算, 得到 $\tau_\alpha = \frac{1}{r} \ln \frac{(\eta - \theta)a - r\alpha m}{(\eta - \theta)a - ru}$, 对 $u \in (\alpha m, \min\{m, u_s\})$ 和 $\forall Q \in \mathcal{Q}$ 有 $Q(\tau_\alpha < \infty) = 1$. 所以

$$\psi(u, m, \infty) = 1, \quad u \in (\alpha m, \min\{m, u_s\}).$$

除非需要强调 ε 的依赖性, 本文其余部分将不讨论 ε , 故将鲁棒值函数记为 $\psi(u, m)$. 记模糊厌恶水平 $\varepsilon = 0$ 时的值函数为 $\psi_0(u, m)$, 即 $\psi_0(u, m) = \psi(u, m, 0)$, 同理记 $\psi_\infty(u, m) = \psi(u, m, \infty)$. 则有

$$0 \leq \psi_0 \leq \psi \leq 1.$$

第二个不等式 $\psi_0 \leq \psi$ 成立是因为 $P \in \mathcal{Q}$; 不等式 $\psi \leq 1$ 成立是因为我们在优化实际概率减去非负惩罚. 这意味着我们可以把稳健的在最优值函数看作保守的破产概率. 惩罚项只会对破产概率造成很小的扭曲, 并且永远不会使它成为负值, 因为只有相对熵较小的度量才有意义, 即比参考测度更差.

3.1 验证定理

回到一般情形, $\psi(u, m)$ 关于 u 是递减的, 因为保险公司的初始盈余显然越多越好. 当 $u < \alpha m$ 时, $\tau_\alpha = 0$ 并且 $\psi(u, m) = 1$. 与此同时, 因为 u_s 给出了一个“安全”的财富水平, 意味着 $u \geq u_s$ 有 $\psi(u, m) = 0$. 漂移不确定性在这里是无关紧要的, 因为保险公司始终可以通过不投资风险资产而进行安全的投资, 能得到 ψ 在 $u = u_s$ 处的连续性. 另一方面, $m \geq u_s$ 时, $M_t = m$. 此时避免 drawdown 等于避免破产水平 αm 的破产. 而 $m \leq u_s$ 时 $M(t)$ 可能大于 m , 即破产水平不一定是固定的. 因此只需要考虑域 \mathcal{O} 上的函数.

$$\mathcal{O} = \{(u, m) \in (\mathbb{R}^+)^2 : \alpha m \leq u \leq \min(m, u_s)\}.$$

现在给出下面的验证定理.

定理 3.1 (验证定理) 假设 $h : \mathcal{O} \rightarrow [0, 1]$, $\Pi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{Q} : \mathcal{O} \rightarrow [0, 1]$, 和 $\mathbf{B} : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Gamma : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ 为满足以下条件的可测函数, 其中 $\mathcal{O} = \{(u, m) \in (\mathbb{R}^+)^2 : \alpha m \leq u \leq \min(m, u_s)\}$

- (1) $h(\cdot, m) \in \mathcal{C}^1[\alpha m, \min\{u_s, m\}] \cap \mathcal{C}^2[\alpha m, \min\{u_s, m\})$, $h(u, \cdot)$ 除 u_s 点外连续可微;
- (2) $h(u, m)$ 为以下方程的解

$$\begin{aligned} 0 = \inf_{\pi, q} \sup_Q & \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon} \beta^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \gamma^2 [ru + (\mu + \sigma\beta - r)\pi \right. \\ & \left. + (q\eta - \eta + \theta)a + q\gamma b] h_u + \frac{1}{2}(q^2 b^2 + \sigma^2 \pi^2) h_{uu} \right\}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$(3) h(\alpha m, m) = 1, h(u_s, m) = 0 \text{ 对 } m \geq u_s, h_m(m, m) = 0 \text{ 对 } m < u_s;$$

(4) $\Pi(u, m)$, $\mathbf{Q}(u, m)$ 对任意 $u \in (\alpha m, \min\{u_s, m\})$ 使得 (3.1) 式取得下确界, $\mathbf{B}(\pi, u, m)$ 对任意 $\pi \in \mathbb{R}$, $u \in (\alpha m, \min\{u_s, m\})$ 使得 (3.1) 式取得上确界, $\Gamma(q, u, m)$ 对任意 $q \in \mathbb{R}$, $u \in (\alpha m, \min\{u_s, m\})$ 使得 (3.1) 式取得上确界;

$$(5) \Pi(u, m) = \mathbf{Q}(u, m) = \mathbf{B}(\pi, u, m) = \Gamma(q, u, m) = 0, \text{ 如果 } u \notin (\alpha m, \min\{u_s, m\});$$

$$(6) \Pi, \mathbf{Q} \text{ 在区间 } \mathcal{O} \text{ 上有界且 Lipschitz 连续; } \mathbf{B}, \Gamma \text{ 在 } \mathcal{O} \text{ 上有界.}$$

则在区间 \mathcal{O} 上 $\psi = h$, 并且 $\Pi, \mathbf{Q}, \mathbf{B}, \Gamma$ 为最优马尔可夫控制.

证 见附录 B. |

3.2 模糊厌恶下的最小 Drawdown 概率

本节我们分别求在 $m \geq u_s$ 和 $m < u_s$ 两种情况下的最优鲁棒值函数. 由边界值问题和定理 3.1 得到模糊厌恶下的最小 drawdown 概率.

当 $\alpha m \leq u \leq u_s \leq m$ 时

$$\begin{cases} \inf_{\pi, q \in \mathcal{D}} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon} \beta^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \gamma^2 + [ru + (\mu + \sigma\beta - r)\pi + (q\eta - \eta + \theta)a \right. \\ \left. + q\gamma b] \psi_u + \frac{1}{2}(q^2 b^2 + \sigma^2 \pi^2) \psi_{uu} \right\} = 0, \\ \psi(\alpha m, m) = 1, \quad \psi(u_s, m) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

当 $\alpha m \leq u \leq m < u_s$ 时

$$\begin{cases} \inf_{\pi, q \in \mathcal{D}} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon} \beta^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \gamma^2 + [ru + (\mu + \sigma\beta - r)\pi + (q\eta - \eta + \theta)a \right. \\ \left. + q\gamma b] \psi_u + \frac{1}{2}(q^2 b^2 + \sigma^2 \pi^2) \psi_{uu} \right\} = 0, \\ \psi(\alpha m, m) = 1, \quad \psi(u_s, u_s) = 0, \\ \psi_m(m, m) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

观察 (3.2) 和 (3.3) 式, 发现两式有相同的 HJB 方程, 而边界值条件不同. 注意花括号内表达式中, β^2, γ^2 系数为负, 根据一阶条件最优 β 和 γ 分别由 π, q 给出, 即 $\beta = \varepsilon \psi_u \sigma \pi$, $\gamma = \varepsilon \psi_u b q$. 将其代入 HJB 方程得到

$$\inf_{\pi, q \in \mathcal{D}} \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 (\varepsilon \psi_u^2 + \psi_{uu}) \pi^2 + (\mu - r) \psi_u \pi + r u \psi_u + \frac{1}{2} b^2 (\varepsilon \psi_u^2 + \psi_{uu}) q^2 + (q\eta - \eta + \theta) a \psi_u \right\} = 0. \quad (3.4)$$

引理 3.1 $\psi(\cdot, m) \in \mathcal{C}^1[\alpha m, u_s] \cap \mathcal{C}^2[\alpha m, u_s]$, 并且满足在区间 $[\alpha m, u_s)$ 上 $\psi_u < 0, \varepsilon\psi_u^2 + \psi_{uu} > 0$.

证 引理证明同文献 [9], 此处省略.

由上述引理, 根据二阶条件找到最优策略 π^* 和 q^* , 即

$$\pi^* = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \cdot \frac{\psi_u}{\varepsilon\psi_u^2 + \psi_{uu}}, \quad (3.5)$$

$$q^* = -\frac{a\eta}{b^2} \cdot \frac{\psi_u}{\varepsilon\psi_u^2 + \psi_{uu}}. \quad (3.6)$$

从而

$$\beta^* = -\frac{\mu - r}{\sigma} \cdot \frac{\varepsilon\psi_u^2}{\varepsilon\psi_u^2 + \psi_{uu}}, \quad (3.7)$$

$$\gamma^* = -\frac{a\eta}{b} \cdot \frac{\varepsilon\psi_u^2}{\varepsilon\psi_u^2 + \psi_{uu}}. \quad (3.8)$$

由引理 3.1 可知 $\pi^*(u) > 0$ 和 $q^*(u) > 0$. 如果 $0 \leq q^*(u) \leq 1$, 将上述 (3.5) 和 (3.6) 式代入到 HJB 方程 (3.4) 得到

$$(R + G) \cdot \frac{\psi_u^2}{\varepsilon\psi_u^2 + \psi_{uu}} - (ru - a\eta + a\theta)\psi_u = 0, \quad (3.9)$$

其中

$$R = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} > 0, \quad G = \frac{a^2\eta^2}{2b^2} > 0.$$

对于上述方程, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 我们得到文献 [16] 中 $\rho = 0$ 时给出的非鲁棒值函数 ψ_0 ; $\varepsilon = \infty$ 时, 得到最坏情况下的值函数 ψ_∞ .

注 3.1 没有模型参数的进一步限制, Isaaca 条件不能满足我们的稳健问题. 假设 $\psi_{uu} < 0$, 但 $\varepsilon\psi_u^2 + \psi_{uu} > 0$. 则 (3.2)–(3.3) 式中 HJB 方程先最大化 β, γ 再最小化 π, q 将产生有限哈密顿量. 但是先最小化 π, q 再最大化 β, γ 将产生无界的哈密顿量. 从另一个角度来看, 我们希望每个固定测度 drawdown 问题的值函数是凸的, 否则哈密顿量将爆炸. 最大化这些凸函数将产生一个凸函数. 另一方面, 我们的稳健值函数在某些区间是凹函数. 我们知道 $\psi_\infty(u, m) = 1$. 由于当 $\varepsilon \rightarrow \infty$ 时, $\psi(u, m, \varepsilon)$ 增加到 $\psi_\infty(u, m)$. 所以对 ε 足够大, $\psi(u, m, \varepsilon)$ 不可能在任何地方都是凸函数. 关于值函数凸度如何取决于 r 和 ε 详细结果见命题 4.1.

作线性变换 $\varphi = e^{\varepsilon\psi}$ 有

$$(R + G) \frac{\varphi_u^2}{\varphi_{uu}} - (ru - a\eta + a\theta)\varphi_u = 0. \quad (3.10)$$

从而得到

$$\frac{1}{\xi_1(u)} = \frac{\varphi_u}{\varphi_{uu}} = \frac{R + G}{ru - a\eta + a\theta}. \quad (3.11)$$

最优鲁棒投资策略和最优鲁棒再保险策略分别为

$$\begin{cases} \hat{\pi}(u) = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \cdot \frac{ru - a\eta + a\theta}{R + G}, \\ \hat{q}(u) = -\frac{a\eta}{b^2} \cdot \frac{ru - a\eta + a\theta}{R + G}. \end{cases} \quad (3.12)$$

令

$$u_1 = \frac{1}{r} \left[a\eta - a\theta - (R + G) \cdot \frac{b^2}{a\eta} \right], \quad (3.13)$$

则有 $\hat{q}(u_1) = 1$, 不难发现 $u_1 < u_s$. 同时由 (3.12) 式得到 $\hat{\pi}$ 和 \hat{q} 关于 u 递减. 因此, 当 $\max\{\alpha m, u_1\} \leq u \leq u_s$ 时有 $0 \leq \hat{q}(u) \leq 1$ 和 $\hat{\pi}(u) \geq 0$, 从而 $\pi^*(u) = \hat{\pi}(u), q^*(u) = \hat{q}(u)$. 而 $u < u_1$ 时我们选择 $q^*(u) = 1$, 并且相应得到

$$\tilde{\pi}(u) = -\frac{(ru + a\theta) - \sqrt{(ru + a\theta)^2 + 2b^2R}}{\mu - r}. \quad (3.14)$$

因此, 如果 $\tilde{\pi} \geq 0$, 将 $(\pi^*(u), q^*(u)) = (\tilde{\pi}(u), 1)$ 代入 (3.4) 式得到

$$R \cdot \frac{\psi_u^2}{\varepsilon\psi_u^2 + \psi_{uu}} - (ru + a\theta)\psi_u - \frac{1}{2}b^2(\varepsilon\psi_u^2 + \psi_{uu}) = 0.$$

作线性变换 $\varphi = e^{\varepsilon\psi}$ 有

$$R \cdot \frac{\varphi_u^2}{\varphi_{uu}^2} - (ru + a\theta)\frac{\varphi_u}{\varphi_{uu}} - \frac{1}{2}b^2 = 0. \quad (3.15)$$

从而得到

$$\frac{1}{\xi_2(u)} = \frac{\varphi_u}{\varphi_{uu}} = \frac{(ru + a\theta) - \sqrt{(ru + a\theta)^2 + 2b^2R}}{2R}. \quad (3.16)$$

综合上述分析结果, 我们首先给出模糊厌恶下的最小 drawdown 概率, 以及相应的最优鲁棒投资策略和最优再保险策略.

定理 3.2 设 $\xi_1(u), \xi_2(u)$ 分别由 (3.11) 式和 (3.16) 式给出, u_1 由 (3.13) 式给出, 且函数 g_i 和 $f_i(i = 1, 2)$ 由附录 A 给出.

(1) 如果 $u_s \leq m$, 则盈余过程 (2.14) 的模糊厌恶下最小 drawdown 概率为

$$\psi(u, m) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \ln \left[(1 - e^\varepsilon) \frac{g_1(u, m)}{g_2(u_s, m)} + e^\varepsilon \right], & \alpha m \leq u < \max\{\alpha m, u_1\}, \\ \frac{1}{\varepsilon} \ln \left[(1 - e^\varepsilon) \frac{g_2(u, m)}{g_2(u_s, m)} + e^\varepsilon \right], & \max\{\alpha m, u_1\} \leq u \leq u_s \leq m. \end{cases} \quad (3.17)$$

(2) $m < u_s$ 时, 如果 $\max\{\alpha m, u_1\} \leq m < u_s$, 则盈余过程 (2.14) 的模糊厌恶下最小 drawdown 概率为

$$\psi(u, m) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \ln \left[(1 - e^\varepsilon) k_1(m) \frac{g_1(u, m)}{g_2(u_s, u_s)} + e^\varepsilon \right], & \alpha m \leq u < \max\{\alpha m, u_1\}, \\ \frac{1}{\varepsilon} \ln \left[(1 - e^\varepsilon) k_1(m) \frac{g_2(u, m)}{g_2(u_s, u_s)} + e^\varepsilon \right], & \max\{\alpha m, u_1\} \leq u \leq m \leq u_s, \end{cases} \quad (3.18)$$

其中

$$k_1(m) = \exp \left\{ \int_m^{u_1} -f_2(y) dy \right\},$$

如果 $\alpha m < m < \max\{\alpha m, u_1\}$, 则盈余过程 (2.14) 的模糊厌恶下最小 drawdown 概率为

$$\psi(u, m) = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left[(1 - e^\varepsilon) k_2(m) \frac{g_1(u, m)}{g_2(u_s, u_s)} \right], \quad (3.19)$$

对 $\forall u \in [\alpha m, m]$. 其中

$$k_2(m) = \exp \left\{ \left(- \int_m^{u_1} f_1(y) - \int_{u_1}^{u_s} f_2(y) \right) dy \right\}.$$

模糊厌恶下的最优鲁棒投资策略和最优鲁棒再保险策略为

$$(\pi^*(u), q^*(u)) = \begin{cases} (\tilde{\pi}(u), 1), & \alpha m \leq u < \max\{\alpha m, u_1\}, \\ (\hat{\pi}(u), \hat{q}(u)), & \max\{\alpha m, u_1\} \leq u \leq \min\{m, u_s\}. \end{cases} \quad (3.20)$$

最优扭曲漂移分别为

$$\beta^* = \begin{cases} -\frac{(ru + a\theta) - \sqrt{(ru + a\theta)^2 + 2b^2R}}{\mu - r} \cdot \varepsilon \psi_u \sigma, & \alpha m \leq u < \bar{M}, \\ -\frac{(\mu - r)(e^\varepsilon - 1)(R + G + r)(ru - a\eta + a\theta)^{\frac{R+G+r}{r}}}{\sigma(R + G) \left[(r\alpha m - a\eta + a\theta)^{\frac{R+G+r}{r}} + (e^\varepsilon - 1)(ru - a\eta + a\theta)^{\frac{R+G+r}{r}} \right]}, & \bar{M} \leq u \leq \underline{M}. \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\gamma^* = \begin{cases} \varepsilon \psi_u b, & \alpha m \leq u < \bar{M}, \\ -\frac{a\eta(e^\varepsilon - 1)(R + G + r)(ru - a\eta + a\theta)^{\frac{R+G+r}{r}}}{b(R + G) \left[(r\alpha m - a\eta + a\theta)^{\frac{R+G+r}{r}} + (e^\varepsilon - 1)(ru - a\eta + a\theta)^{\frac{R+G+r}{r}} \right]}, & \bar{M} \leq u \leq \underline{M}. \end{cases} \quad (3.22)$$

其中, 我们记 $\bar{M} = \max\{\alpha m, u_1\}$, $\underline{M} = \min\{m, u_s\}$.

证 (1) 首先对 $u_s \leq m$ 时的最优解进行证明. 为方便计算, 前文我们对值函数 ψ 满足的 HJB 方程进行线性变换得到 (3.11) 式和 (3.16) 式. 其中线性变换后的边界值条件为

$$\varphi(\alpha m, m) = e^\varepsilon, \quad \varphi(u_s, m) = 1.$$

首先猜解 φ 有以下形式

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1(u, m) = c_{11} \int_{\alpha m}^u \exp \left\{ \int_{\alpha m}^y \xi_1(w) dw \right\} dy + c_{12}, & \alpha m \leq u < \max\{\alpha m, u_1\}, \\ \varphi_2(u, m) = c_{13} \int_{u_1}^u \exp \left\{ \int_{\alpha m}^y \xi_2(w) dw \right\} dy + c_{14}, & \max\{\alpha m, u_1\} \leq u \leq u_s, \end{cases}$$

其中 c_{1i} ($i = 1, 2, 3, 4$) 根据边界值条件以及下述光滑性条件得出

$$\varphi_1(u_1, m) = \varphi_2(u_1, m), \quad \frac{\partial \varphi_1(u_1, m)}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_2(u_1, m)}{\partial u}.$$

经过计算得到

$$\begin{cases} c_{11} = \frac{1 - e^\varepsilon}{g_2(u_s, m)}, & c_{12} = e^\varepsilon, \\ c_{13} = \frac{1 - e^\varepsilon}{g_2(u_s, m)} \exp \left\{ \int_{\alpha m}^{u_1} \xi_1(w) dw \right\}, \\ c_{14} = e^\varepsilon + (1 - e^\varepsilon) \frac{g_1(u_1, m)}{g_2(u_s, m)}. \end{cases}$$

最后, 根据 $\psi = \frac{\ln \varphi}{\varepsilon}$ 即可得出模糊厌恶下的最小 drawdown 概率.

(2) 接下来对 $m > u_s$ 时的情形证明. 此时线性变换后的边界值条件为

$$\begin{cases} \varphi(\alpha m, m) = e^\varepsilon, & \varphi(u_s, u_s) = 1, \\ \varphi_m(m, m) = 0. \end{cases}$$

我们给出 $m \in [\max\{\alpha m, u_1\}, u_s]$ 时的证明, 而 $m \in [\alpha m, \max\{\alpha m, u_1\}]$ 时的证明可类似得出. 为简化过程, 我们假设 $\alpha m < u_1$ ($\alpha m \geq u_1$ 时的结果可类似得出).

首先猜解 φ 有以下形式

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_3(u, m) = c_{21} \int_{\alpha m}^u \exp \left\{ \int_{\alpha m}^y \xi_1(w) dw \right\} dy + c_{22}, & \alpha m \leq u < u_1, \\ \varphi_4(u, m) = c_{23} \int_{u_1}^u \exp \left\{ \int_{u_1}^y \xi_2(w) dw \right\} dy + c_{24}, & u_1 \leq u \leq m < u_s, \end{cases}$$

其中 c_{2i} ($i = 1, 2, 3, 4$) 根据边界值条件以及下述光滑性条件得出

$$\begin{cases} \varphi_3(u_1, m) = \varphi_4(u_1, m), & \frac{\partial \varphi_4(m, m)}{\partial m} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_3(u, m)}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_4(u, m)}{\partial u}. \end{cases}$$

经过计算得到

$$\begin{cases} c_{21} = \frac{1 - e^\varepsilon}{g_2(u_s, u_s)} \cdot k_1(m), & c_{22} = e^\varepsilon, \\ c_{23} = \frac{1 - e^\varepsilon}{g_2(u_s, u_s)} \cdot k_1(m) \exp \left\{ \int_{\alpha m}^{u_1} \xi_1(w) dw \right\}, \\ c_{24} = e^\varepsilon + (1 - e^\varepsilon) k_1(m) \frac{g_1(u_1, m)}{g_2(u_s, u_s)}. \end{cases}$$

最后, 根据 $\psi = \frac{\ln \varphi}{\varepsilon}$ 即可得出模糊厌恶下的最小 drawdown 概率. 证毕. |

注 3.2 我们给出特殊情形下的最优鲁棒值函数.

当 $u_1 < \alpha m \leq u \leq u_s$ 时, 模糊厌恶下的最小 drawdown 概率为

$$\psi(u, m) = \frac{\ln \varphi}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left[1 + (e^\varepsilon - 1) \left(\frac{ru - a\eta + a\theta}{r\alpha m - a\eta + a\theta} \right)^{\frac{R+G+r}{r}} \right]. \quad (3.23)$$

当 $u_1 < \alpha m \leq u \leq m \leq u_s$ 时, 模糊厌恶下的最小 drawdown 概率为

$$\psi(u, m) = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left\{ e^\varepsilon + (e^\varepsilon - 1) \frac{r\alpha m - a\eta + a\theta}{r\alpha u_s - a\eta + a\theta} \left[\left(\frac{ru - a\eta + a\theta}{r\alpha m - a\eta + a\theta} \right)^{\frac{R+G+r}{r}} - 1 \right] \right\}. \quad (3.24)$$

注 3.3 验证 Novikov 条件. 结合 (2.10), (2.11) 式和 (3.5), (3.6) 式有

$$\begin{aligned} E^P \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T [\beta(s)]^2 ds \right) \right] &= E^P \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \left(-\frac{\mu - r}{\sigma} \cdot \frac{\varepsilon \psi_u^2}{\varepsilon \psi_u^2 + \psi_{uu}} \right)^2 ds \right\} \right] < \infty, \\ E^P \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T [\gamma(s)]^2 ds \right) \right] &= E^P \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \left(-\frac{a\eta}{b} \cdot \frac{\varepsilon \psi_u^2}{\varepsilon \psi_u^2 + \psi_{uu}} \right)^2 ds \right\} \right] < \infty. \end{aligned}$$

不等式成立是由于 $T < \infty$.

4 规律和性质

本小节我们将要说明反馈形式的一些性质, 观察 (3.12), (3.14) 和 (3.20) 式不难发现, π^*, q^* 在区间 $(\alpha m, \min\{m, u_s\})$ 上有界且 Lipschitz 连续, 接下来讨论其他性质.

定理 4.1 由 (3.20) 式的 q^* 使得 (3.2)–(3.3) 式的 HJB 方程取到下确界.

证 根据 (3.2) 式的 HJB 方程, 设

$$g(q) = \frac{1}{2}\sigma^2[\varepsilon\psi_u^2 + \psi_{uu}] + (\mu - r)\psi_u\pi + ru\psi_u + \frac{1}{2}b^2[\varepsilon(\psi_u)^2 + \psi_{uu}]q^2 + (q\eta - \eta + \theta)a\psi_u,$$

所以

$$\frac{\partial g}{\partial q} = b^2[\varepsilon(\psi_u)^2 + \psi_{uu}]q + \eta a\psi_u,$$

并且

$$\frac{\partial^2 g}{\partial q^2} = b^2[\varepsilon\psi_u^2 + \psi_{uu}].$$

所以有 $g(q)$ 为凸函数, 根据引理 3.1 定理得证. 证毕. |

注 4.1 因为 π^*, q^* 有解析解, 不难发现其函数有界性和 Lipschitz 连续性. 但是对于最优再保险保留水平 q^* , 我们应该确保它在 $[0, 1]$ 区间内, 同时由于验证定理要求 q^* 的最优性, 所以有上述定理.

命题 4.1 $\psi(u, m)$ 关于 u 在区间 $[\alpha m, \min\{u_s, m\}]$ 上至多改变一次凹凸性.

(1) 当 $\alpha m \leq u \leq u_s \leq m$ 时, 如果 $0 \leq \varepsilon \leq -\frac{(R+G)g_2(u_s, m)}{r\alpha m - a\eta + a\theta}$, 则 $\psi(\cdot, m)$ 在区间 $[\alpha m, \min\{u_s, m\}]$ 上为严格凸函数;

当 $\max\{\alpha m, u_1\} \leq m \leq u_s$ 时, 如果 $0 \leq \varepsilon \leq -\frac{(R+G) \cdot g_2(u_s, u_s)}{(r\alpha m - a\eta + a\theta) \cdot k_2(m)}$, 则 $\psi(\cdot, m)$ 在区间 $[\alpha m, \min\{u_s, m\}]$ 上为严格凸函数;

当 $\alpha m \leq m < \max\{\alpha m, u_1\}$ 时, 如果 $0 \leq \varepsilon \leq -\frac{(R+G) \cdot g_2(u_s, u_s)}{(r\alpha m - a\eta + a\theta) \cdot k_1(m)}$, 则 $\psi(\cdot, m)$ 在区间 $[\alpha m, \min\{u_s, m\}]$ 上为严格凸函数.

(2) 如果 $\varepsilon > \frac{R+G}{r}$, $\psi(\cdot, m)$ 凹凸性发生变化. ψ 在区间 $[\alpha m, u_0]$ 上严格凸, 在 $(u_0, \min\{u_s, m\})$ 上严格凹, 其中 u_0 是区间 $[\alpha m, \min\{u_s, m\}]$ 上满足 $(ru_0 - a\eta + a\theta)\psi_u(u_0) = \frac{R+G}{\varepsilon}$ 的唯一点.

证 当 $\varepsilon = 0$ 时, $\psi(\cdot, m)$ 为严格凸函数, 故现假设 $\varepsilon > 0$.

令 $y(u, m) = (ru - a\eta + a\theta)\psi_u$. 由引理 1 可知 $\psi_u < 0$, 所以在区间 $[\alpha m, \min\{u_s, m\}]$ 上有 $y \geq 0$. 又因为 ψ 满足

$$(R + G) \frac{\psi_u^2}{\varepsilon\psi_u^2 + \psi_{uu}} = y.$$

将 ψ_{uu} 移到等号左侧, 其他项移到等号右侧, 得到

$$\left(\frac{R + G}{y} - \varepsilon \right) \psi_u^2 = \psi_{uu}. \quad (4.1)$$

则 (4.1) 式表示在任何情况下, 无论 ε 的大小如何, $\psi(\cdot, m)$ 都将在 $u = u_s$ 附近严格凹. 这是因为 $y(u_s, m) = 0$, 因此 u_s 邻域有 $\frac{R+G}{y} - \varepsilon > 0$. 因为 $\psi(\cdot, m) \in C^2[\alpha m, \min\{u_s, m\}]$, 对 y 关于 u 求导得到

$$y_u = r\psi_u + (ru - a\eta - a\theta)\psi_{uu} < (ru - a\eta - a\theta)\psi_{uu}.$$

假设 $\psi(\cdot, m)$ 在 $u = u_0$ 处改变凹凸性, 则有 $\psi_{uu}(u_0) = 0$. 而上述不等式有 $y_u(u_0) < 0$. 因此只要 $\psi(\cdot, m)$ 改变凹凸性 y 关于 u 就严格减小.

观察 (4.1) 式, 我们发现如果 $\psi(\cdot, m)$ 凹凸性发生变化, 只能从凸函数到凹函数. 既然我们已经得出结论 $\psi(\cdot, m)$ 在 u_s 的领域是严格凹的, 可以得出以下结论: 如果 $\psi(\cdot, m)$ 不是在任何地方都凹函数, 那么函数的凹凸性只能发生一次改变, 即在使得 $y(u_0, m) = \frac{R+G}{\varepsilon}$ 成立的 u_0 点之前的区间上 $\psi(\cdot, m)$ 严格凸, 在 u_0 点之后的区间上 $\psi(\cdot, m)$ 严格凹.

我们还注意到, 由于 y 关于 u 只能以递减的方式达到或穿过 $\frac{R+G}{\varepsilon}$ 处的水平线. 因此对 $u \in [\alpha m, u_0]$ 有 $y(u, m) > \frac{R+G}{\varepsilon}$, 对 $u \in (u_0, \min\{u_s, m\})$ 有 $y(u, m) < \frac{R+G}{\varepsilon}$.

接下来我们确定 $\psi(\cdot, m)$ 是否改变凹凸性. 考虑到 y 与 $\frac{R+G}{\varepsilon}$ 相交的方式, 检查 $y(\alpha m) > \frac{R+G}{\varepsilon}$ 是否成立即可. 我们有

$$y(\alpha m, m) = (r\alpha m - a\eta + a\theta)\psi_u(\alpha m).$$

(1) $\psi(\cdot, m)$ 凹凸性不发生变化.

情况 1 当 $\alpha m \leq u \leq u_s \leq m$, 如果 $0 \leq \varepsilon \leq -\frac{(R+G)g_2(u_s, m)}{r\alpha m - a\eta + a\theta}$, 则

$$y(\alpha m, m) \leq (r\alpha m - a\eta + a\theta) \frac{\partial \psi_0}{\partial u}(\alpha m) = -\frac{r\alpha m - a\eta + a\theta}{g_2(u_s, m)} \leq \frac{R+G}{\varepsilon},$$

并且 $\psi(\cdot, m)$ 的凹凸性不会发生变化.

情况 2 当 $\max\{\alpha m, u_1\} \leq m \leq u_s$ 时, 如果 $0 \leq \varepsilon \leq -\frac{(R+G) \cdot g_2(u_s, u_s)}{(r\alpha m - a\eta + a\theta) \cdot k_2(m)}$, 则

$$y(\alpha m, m) \leq (r\alpha m - a\eta + a\theta) \frac{\partial \psi_0}{\partial u}(\alpha m) = -\frac{(r\alpha m - a\eta + a\theta) \cdot k_2(m)}{g_2(u_s, u_s)} \leq \frac{R+G}{\varepsilon},$$

并且 $\psi(\cdot, m)$ 的凹凸性不会发生变化.

情况 3 当 $\alpha m \leq m < \max\{\alpha m, u_1\}$ 时, 如果 $0 \leq \varepsilon \leq -\frac{(R+G) \cdot g_2(u_s, u_s)}{(r\alpha m - a\eta + a\theta) \cdot k_1(m)}$, 则

$$y(\alpha m, m) \leq (r\alpha m - a\eta + a\theta) \frac{\partial \psi_0}{\partial u}(\alpha m) = -\frac{(r\alpha m - a\eta + a\theta) \cdot k_1(m)}{g_2(u_s, u_s)} \leq \frac{R+G}{\varepsilon},$$

并且 $\psi(\cdot, m)$ 的凹凸性不会发生变化.

(2) $\psi(\cdot, m)$ 凹凸性发生变化: 如果 $\varepsilon > \frac{R+G}{r}$, 则要考虑以下两种情况.

情况 1 如果 $\psi_u(\alpha m) > \frac{1}{\alpha m - u_s} = \frac{r}{ru - a\eta + a\theta}$, 则 $\psi(\cdot, m)$ 不可能到处都是凹的. 如果它在任何地方都是凹的, 将 m 视作已知时它将停留在通过点 $(\alpha m, 1)$ 的切线上方. 但是点 $(u_s, 0)$ 位于该切线以下, 这意味着不满足右边界值条件.

情况 2 如果 $\psi_u(\alpha m) \leq \frac{r}{r\alpha m - a\eta + a\theta}$. 则 $y(\alpha m, m) > r > \frac{R+G}{r}$. 这两种情形 $\psi(\cdot, m)$ 都将改变凹凸性. 证毕.

注 4.2 根据反馈形式 (3.7), 当 ψ 关于 u 为凸时 β^* 的下界为 $-\frac{\mu-r}{\sigma}$. 如果 $\psi(\cdot, m)$ 不是凸的, 则其拐点是 $\beta^* = -\frac{\mu-r}{\sigma}$ 的唯一点. 换句话说, 当扭曲的夏普比率 $\frac{\mu-r}{\sigma} + \beta^*$ 为零时, $\psi(\cdot, m)$ 改变凹凸性. 此外, 由于 $\psi(\cdot, m)$ 从凸变凹, 因此扭曲的夏普比率在拐点左侧为负, 右侧为正.

5 数值分析

我们已经解决了边界值问题 (3.2)–(3.3) 使用模型参数 $a = 1, b = 0.3, r = 0.04, \mu = 0.08, \sigma = 0.2, \eta = 0.15, \theta = 0.1, \alpha = 0.1$, 以 $\varepsilon = 1, 10$ 为例考虑 $m > u_s$ 时不同模糊厌恶规避参数对鲁棒值函数的影响.

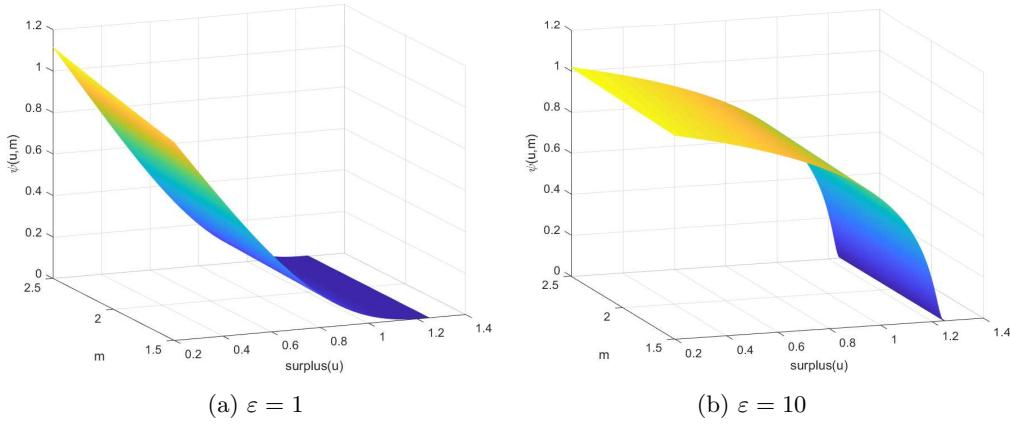


图 1 不同模糊厌恶水平下鲁棒值函数

观察图 1 发现, 两个不同模糊厌恶规避参数下的鲁棒值函数 $\psi(u, m)$ 均是关于初始盈余值 u 非增函数, 是关于过去盈余最大值 m 的非减函数. 而不同模糊规避参数对鲁棒值函数的影响主要表现为函数 $\psi(\cdot, m)$ 的凹凸性, 即鲁棒最小 drawdown 概率关于初始盈余 u 增减的快慢. $\varepsilon = 1$ 时 $\psi(u, m)$ 减小速度较快, $\varepsilon = 10$ 时 $\psi(u, m)$ 减小速度先慢后快. 关于 ε 对 u 凹凸性影响我们将在图 2 中给出具体分析.

为分析不同模糊厌恶规避参数对值函数以及各个控制的具体影响, 我们在上述模型参数的基础上考虑 $m = 2$ 时, $\varepsilon = 0, 1, 5, 10, 50$ 对 $\psi(\cdot, 2)$ 以及各个最优控制的影响. 观察计算结果发现, 鲁棒最优投资策略与非鲁棒最优投资策略相同, 与模糊厌恶规避参数 ε 以及保险公司 drawdown 水平 αm 无关. 鲁棒最优再保险策略与非鲁棒最优再保险策略也是如此. 由于它们均是一个简单的向下倾斜的线性函数, 并与 ε 无关, 因此我们省略了 π^* 和 q^* 的图像.

5.1 模糊厌恶水平对鲁棒最小 drawdown 概率的影响

观察图 2, 我们看到鲁棒最优值函数关于 ε 递增. $\psi(\cdot, 2)$ 的凹凸性取决于模糊厌恶的程度: 当 ε 较小时 $\psi(\cdot, 2)$ 为凸函数; 当 ε 较大时 $\psi(\cdot, 2)$ 从凸函数变为凹函数. 并且 ε 越大, 拐点越接近安全水平. 针对本例所选参数 α, m 的大小, 命题 4.1 表明 $\psi(\cdot, m)$ 为凸函数的充分条件是 $0 \leq \varepsilon \leq 1.0317$. $\psi(\cdot, 2)$ 改变凹凸性的充分条件是 $\varepsilon > 1.625$, $\varepsilon = 5, 10, 50$ 都满足该条件并显示出凹凸性的变化. 通过注 4.2 知道 $\psi(\cdot, m)$ 的拐点对应于最优扭曲夏普比率率为零的点, 这个现象可观察图 3 辅助分析.

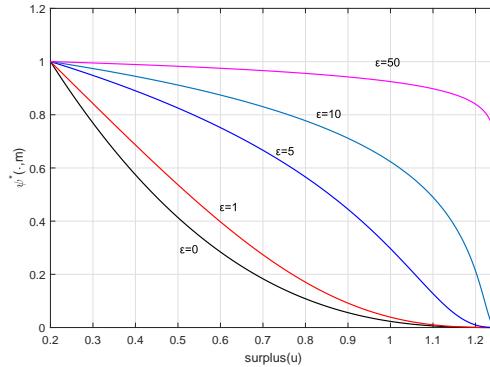


图 2 不同模糊厌恶水平下的最小 drawdown 概率

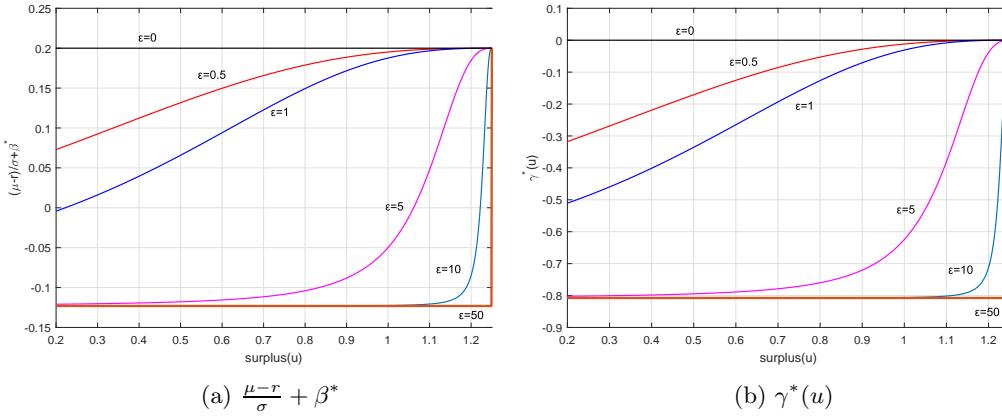


图 3 不同模糊厌恶水平下扭曲夏普比率和扭曲漂移

我们发现任何模糊厌恶水平下的最小 drawdown 概率都是关于 u 的减函数, 这与实际情况及前文分析相符. 同时有模糊厌恶水平越高, 鲁棒最优值函数的减小的越缓慢. 此现象的实际意义也不难发现, 即保险公司模糊厌恶水平越高或者说对已知参考模型信任度越低时, 保险公司越倾向于更加稳健的投资策略和再保险策略, 保险公司发生 drawdown 的可能性越小.

5.2 模糊厌恶水平对最优漂移扭曲的影响

我们知道最优扭曲漂移 $\beta^*(u)$ 是非正且关于盈余值 u 单调递增. 为更好的分析最优漂移扭曲的性质绘制了模糊厌恶水平 $\varepsilon = 0, 0.5, 1, 5, 10, 50$ 下的扭曲夏普比率函数图像. 结合命题 4.1 和注 4.2, 不同模糊厌恶水平下扭曲夏普比率函数图像与 u 轴的交点即为图 2 中值函数凹凸性发生改变的拐点.

最优扭曲漂移 $\beta^*(u)$ 和 $\gamma^*(u)$ 都是非正且关于盈余值 u 单调递增. 在 ε 较小而非零时最优扭曲漂移的下界分别为 -0.2 和 -0.5 , 在到达安全水平时刻前匀速增长至 0 , 对应的模糊厌恶最小 drawdown 概率值函数为凸函数; ε 较大时最优扭曲漂移的下界分别为 -0.123 和 -0.808 , 增长速度先慢后快. 这是由于在 $\varepsilon \rightarrow \infty$ 时, β^* 极限为 $-\frac{\mu-r}{\sigma} \cdot \frac{R+G+r}{R+G}$, γ^* 极限为 $-\frac{an}{b} \frac{R+G+r}{R+G}$. 而在 u_s 附近最优扭曲漂移迅速增为 0 , 这与保险公司在安全水平时刻采取保守的投资策略和再保险策略有关.

观察两个最优扭曲漂移 $\beta^*(u)$ 和 $\gamma^*(u)$ 的大小, 发现 $\gamma^*(u)$ 的绝对值大于 $\beta^*(u)$ 的绝对值. 结合相对熵的概念, 认为保险市场不确定性比金融市场不确定性造成的惩罚更大. 所以保险公司在运营时应该对及保险市场采取更加稳健的决策来降低风险.

6 结论与展望

本文中, 我们假设保险公司购买比例再保险并且将盈余投资与风险资产和无风险资产, 得出模糊厌恶框架下的最小 drawdown 概率和相应的鲁棒最优投资和再保险策略. 模糊厌恶在本文中具体表现为金融市场和保险市场的模型不确定性, 通过动态规划原理, 求出了鲁棒最优策略和值函数的解析解.

本文的创新点和结论主要体现在以下几个方面. 首先从最小 drawdown 概率的角度来研究模糊厌恶下保险公司的最优决策问题. 目前关于模型不确定性的研究大部分以效用函数为研究角度, 我们从风险控制理论出发, 联系保险公司实际运营情况, 研究模型不确定下保

险公司的最小 drawdown 概率问题. 利用线性变化, 巧妙地对值函数进行求解. 通过与确定模型下最小 drawdown 问题的最优结果对比以及数值分析, 我们知道对于保险公司是否应该关心模糊厌恶, 就投资和再保险问题而言, 这并不是有用的信息, 因为是否考虑模糊厌恶对投资和再保险策略并不会产生影响. 但是通过观察不同模糊厌恶规避参数对最小 drawdown 概率的影响, 可以得出模糊厌恶对值函数影响较大, 也就是说保险公司做出的投资和再保险决策使保险公司承担的风险大大增加, 因此保险公司应该关心较大 ε 的鲁棒性. 其次, 本文假设金融市场和保险市场均不确定, 并创新性的研究金融市场不确定和保险市场不确定对保险公司运营的影响, 分别比较不同模糊厌恶规避参数对金融市场和保险市场最优扭曲漂移的影响, 可以得出保险市场不确定性比金融市场不确定造成的惩罚更大, 所以保险公司在关注金融市场的时应将保险市场自身的业务放在重中之重, 不应顾此失彼, 要构建更加稳健精确的保险业务模型.

本文主要是在基础模型框架下对模糊厌恶的最小 drawdown 概率, 最优投资和再保险策略方面进行的研究, 所以本文所求的最优决策都是理想模型下的稳健最优决策. 接下来我们可以对复杂模型下的鲁棒最优问题进行研究. 比如, 我们可以研究金融市场与保险市场相关下的稳健投资策略; 另外, 我们考虑将投资于风险资产的资金加以约束或者考虑借贷下的稳健最优投资决策; 而且本文运用期望值保费原则收取保费, 我们可以在更广义的方差保费原则下对最优鲁棒再保险决策进行研究.

参 考 文 献

- [1] Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin. *Math Oper Res*, 1995, **20**: 937–958
- [2] Bai L, Guo J. Optimal proportional reinsurance and investment with multiple risky assets and no-shorting constraint. *Insur Math Econ*, 2008, **42**(3): 968–975
- [3] Liang Z, Bai L, Guo J. Optimal investment and proportional reinsurance with constrained control variables. *Optim Contr Appl Met*, 2011, **32**(5): 587–608
- [4] 陈密, 郭军义. 指数保费准则下的最优投资和比例再保险. *数学物理学报*, 2014, **34A**(5): 1161–1172
Chen M, Guo J. Optimal investment and proportional reinsurance under exponential premium calculation. *Acta Math Sci*, 2014, **34A**(5): 1161–1172
- [5] Maenhout P J. Robust portfolio rules and asset pricing. *Rev Financ Stud*, 2004, **17**(4): 951–983
- [6] Bordigoni G, Matoussi A, Schweizer M. A Stochastic Control Approach to a Robust Utility Maximization Problem//Benth F E, Di Nunno G, Lindstrøm T, et al. *Stoch Anal Appl*. Berlin: Springer, 2007: 125–151
- [7] 李冰, 耿彩霞. CEV 模型下鲁棒最优投资和超额损失再保险问题研究. *统计学与应用*, 2018, **7**(5): 495–504
Li B, Geng C. Research on robust optimal investment and excess-of-loss reinsurance under CEV model. *Statistics and Applications*, 2018, **7**(5): 495–504
- [8] Liu B, Zhou M, Li P. Optimal investment and premium control for insurers with ambiguity. *Commun Stat Theor M*, 2020, **49**(9): 2110–2130
- [9] Bayraktar E, Zhang Y. Minimizing the probability of lifetime ruin under ambiguity aversion. *SIAM J. Control Optim*, 2015, **53**(1): 58–90
- [10] Schmidli H. Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting. *Scand Actuar J*, 2001, **2001**(1): 55–68
- [11] Young V. Optimal investment strategy to minimize the probability of lifetime ruin. *North Amer Actuar J*, 2004, **8**(4): 105–126
- [12] David P S, Young V R. Minimizing the probability of ruin when claims follow Brownian motion with drift. *North Amer Actuar J*, 2005, **9**(3): 110–128
- [13] Angoshtari B, Bayraktar E, Young V. Optimal investment to minimize the probability of drawdown. *Stochastics*, 2016, **88**(6): 946–958
- [14] Han X, Liang Z, Yuen K C. Optimal proportional reinsurance to minimize the probability of drawdown under thinning-dependence structure. *Scand Actuar J*, 2018, **10**: 863–889

- [15] Angoshtari B, Bayraktar E, Young V. Minimizing the probability of lifetime drawdown under constant consumption. *Insur Math Econ*, 2016, **69**: 210–223
[16] Han X, Liang Z. Optimal reinsurance and investment in danger-region and safe-region. *Optim Contr Appl Met*, 2020, **41**: 765–792

A 辅助函数

函数 g_i 和 $f_i (i = 1, 2)$ 为

$$\begin{cases} g_1(u, m) = \int_{\alpha m}^u \exp \left\{ \int_{\alpha m}^y \xi_2(w) dw \right\} dy, \\ g_2(u, m) = \int_{\alpha m}^{\alpha m \vee u_1} \exp \left\{ \int_{\alpha m}^y \xi_2(w) dw \right\} dy \\ \quad + \int_{\alpha m \vee u_1}^u \exp \left\{ \int_{\alpha m \vee u_1}^y \xi_2(w) dw + \int_{\alpha m \vee u_1}^y \xi_1(w) dw \right\} dy \end{cases}$$

和

$$f_i(y) = \begin{cases} \alpha \left[\frac{1}{g_i(y, y)} + \xi_1(\alpha y) \right], & u_1 < \alpha m, \\ \alpha \left[\frac{1}{g_i(y, y)} + \xi_2(\alpha y) \right], & \alpha m < u_1. \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

B 定理 3.1 证明

证 本验证定理我们分 3 步完成.

步骤 1 设 $\pi_t^* := \Pi(U_t^{\Pi, Q})$, $\mathbf{q}_t^* := \mathbf{Q}(U_t^{\Pi, Q})$, 并且 $U_t^{\pi^*, \mathbf{q}^*} := U_t^{\Pi, Q}$. 定义

$$\tau_\alpha^* := \inf\{t \geq 0 : U_t^{\pi^*, \mathbf{q}^*} \leq \alpha m\}, \quad \tau^* := \inf\{t \geq 0 : U_t^{\pi^*, \mathbf{q}^*} \geq u_s\}.$$

设 $Q \in \mathcal{Q}$ 为相应漂移扭曲过程 β 和 γ 的任意候选测度. 根据 Girsanov 定理, $U_t^{\pi^*, \mathbf{q}^*}$ 满足

$$\begin{aligned} dU_t^{\pi^*, \mathbf{q}^*} &= [rU_t^{\pi^*, \mathbf{q}^*} + (\mu + \sigma\beta - r)\pi_t^* + (\mathbf{q}_t^*\eta - \eta + \theta)a + \mathbf{q}_t^*\gamma b]dt \\ &\quad + \sigma\pi_t^*dB_t^Q + \mathbf{q}_t^*bdW_t^Q, \quad U_0 = u. \end{aligned}$$

对 $h(u, m)$ 应用 Itô 引理有

$$\begin{aligned} &h(U_{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*}^{\pi^*, \mathbf{q}^*}, M_{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*}^{\pi^*, \mathbf{q}^*}) \\ &= h(u, m) + \int_0^{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*} \left\{ [rU_s^{\pi^*, \mathbf{q}^*} + (\mu + \sigma\beta - r)\pi_s^* + (\mathbf{q}_s^*\eta - \eta + \theta)a + \mathbf{q}_s^*\gamma b]h_u \right\} ds \\ &\quad + \int_0^{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*} \left[\frac{1}{2}\sigma^2(\pi_s^*)^2h_{uu} + \frac{1}{2}b^2(\mathbf{q}_s^*)^2h_{uu} \right] ds \\ &\quad + \int_0^{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*} h_u(U_s^{\pi^*, \mathbf{q}^*}, M_s^{\pi^*, \mathbf{q}^*})[\sigma\pi_s^*dB_s^Q + b\mathbf{q}_s^*dW_s^Q] \\ &\quad + \int_0^{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*} h_m(U_s^{\pi^*, \mathbf{q}^*}, M_s^{\pi^*, \mathbf{q}^*})dM_s^{\pi^*, \mathbf{q}^*}. \end{aligned}$$

上述 Itô 公式中第三个积分关于 Q 取期望后为 0, 因为 h_u 和 Π, \mathbf{Q} 在区间 $[\alpha m, \min\{u_s, m\}]$ 上有界; 第四个积分在 $u_s \leq m$ 时 $M_t^{\boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{q}^*} = U_t^{\boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{q}^*}$, 而在 $m < u_s$ 时 $h_m(m, m) = 0$. 所以等式两边关于 Q 取期望为

$$\begin{aligned} & E^Q[h(U_{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*}^{\boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{q}^*}, M_{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*}^{\boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{q}^*})] \\ &= h(u, m) + E^Q \left[\int_0^{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*} \left\{ [rU_s^{\boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{q}^*} + (\mu + \sigma\beta - r)\boldsymbol{\pi}_s^* + (\mathbf{q}_s^*\eta - \eta + \theta)a + \mathbf{q}_s^*b\gamma] h_u \right\} ds \right] \\ &+ E^Q \left[\int_0^{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*} \left(\frac{1}{2}\sigma^2(\boldsymbol{\pi}_s^*)^2 h_{uu} + \frac{1}{2}b^2(\mathbf{q}_s^*)^2 h_{uu} \right) ds \right]. \end{aligned}$$

根据验证定理条件 (2), (4) 有

$$\begin{aligned} 0 &= \inf_{\boldsymbol{\pi}, q} \sup_{\beta, \gamma} \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon}\beta^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\gamma^2 + [rU_s^{\boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{q}^*} + (\mu + \sigma\beta - r)\boldsymbol{\pi}_s^* \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{q}_s^*\eta - \eta + \theta)a]h_u + \frac{1}{2}\sigma^2(\boldsymbol{\pi}_s^*)^2 h_{uu} + \frac{1}{2}b^2(\mathbf{q}_s^*)^2 h_{uu} \right\} \\ &= \sup_{\beta, \gamma} \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon}\beta^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\gamma^2 + [rU_s^{\boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{q}^*} + (\mu + \sigma\beta - r)\boldsymbol{\pi}_s^* \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{q}_s^*\eta - \eta + \theta)a]h_u + \frac{1}{2}\sigma^2(\boldsymbol{\pi}_s^*)^2 h_{uu} + \frac{1}{2}b^2(\mathbf{q}_s^*)^2 h_{uu} \right\} \\ &\geq -\frac{1}{2\varepsilon}\beta_s^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\gamma_s^2 + [rU_s^{\boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{q}^*} + (\mu + \sigma\beta - r)\boldsymbol{\pi}_s^* \\ &\quad + (\mathbf{q}_s^*\eta - \eta + \theta)a]h_u + \frac{1}{2}\sigma^2(\boldsymbol{\pi}_s^*)^2 h_{uu} + \frac{1}{2}b^2(\mathbf{q}_s^*)^2 h_{uu}. \end{aligned}$$

所以有

$$E^Q[h(U_{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*}^{\boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{q}^*}, M_{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*}^{\boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{q}^*})] \leq h(u, m) + E^Q \left[\int_0^{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*} \left(\frac{1}{2\varepsilon}\beta_s^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\gamma_s^2 \right) ds \right],$$

等价于

$$h(u, m) \geq E^Q \left[h(U_{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*}^{\boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{q}^*}, M_{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*}^{\boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{q}^*}) - \int_0^{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*} \left(\frac{1}{2\varepsilon}\beta_s^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\gamma_s^2 \right) ds \right].$$

根据条件 (5), 一旦财富过程超过安全水平 $U^{\boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{q}^*}$ 将为常数. 这意味着如果保险公司财富达到安全水平, 保险公司将永远不会发生 drawdown. 所以我们有 $\{\tau_\alpha^* < \tau^*\} = \{\tau_\alpha^* < \infty\}$. 因为 $h(U_{\tau_\alpha^* \wedge \tau^*}^{\boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{q}^*}) = 1_{\{\tau_\alpha^* < \tau^*\}} = 1_{\{\tau_\alpha^* < \infty\}}$ 并且 $\tau_\alpha^* \wedge \tau^* \leq \tau_\alpha^*$, 所以得到

$$\begin{aligned} h(u, m) &\geq \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^Q \left[1_{\{\tau_\alpha^* < \infty\}} - \int_0^{\tau_\alpha^*} \left(\frac{1}{2\varepsilon}\beta_s^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\gamma_s^2 \right) ds \right] \\ &\geq \inf_{\pi, q \in \mathcal{A}} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^Q \left[1_{\{\tau_\alpha^{u, \pi, q} < \infty\}} - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau_\alpha} \left(\frac{1}{2}\beta_s^2 + \frac{1}{2}\gamma_s^2 \right) ds \right] = \psi(u, m). \end{aligned}$$

步骤 2 设 $\beta_t^* := \mathbf{B}(\pi_t, U_t^{\boldsymbol{\pi}, \mathbf{q}})$, $\gamma_t^* := \Gamma(q_t, U_t^{\boldsymbol{\pi}, \mathbf{q}})$, β_t^*, γ_t^* 是逐步可测的, 由于 $\pi_t, q_t, U_t^{\boldsymbol{\pi}, \mathbf{q}}$ 均可测, 从而 \mathbf{B}, Γ 为可测函数. 由于 π_t, q_t 关于 t 几乎处处一致有界, 条件 (6) 确保 β_t^*, γ_t^*

满足 \mathcal{Q} 定理下所有可积条件. 所以存在测度 $Q^* \in \mathcal{Q}$ 得到相应的过程 β^*, γ^* . 在 Q^* 下, $U_t^{\pi, q}$ 满足

$$\begin{aligned} dU_t^{\pi, q} &= [rU_t^{\pi, q} + (\mu + \sigma\beta_t^* - r)\pi_t + (q_t\eta - \eta + \theta)a + q_t\gamma_t^*b]dt \\ &\quad + \sigma\pi_t dB_t^{Q^*} + q_tbdW_t^{Q^*}, \quad U_0 = u. \end{aligned}$$

定义

$$\tau_\alpha := \inf\{t \geq 0 : U_t^{\pi, q} \leq \alpha m\}, \quad \tau := \{t \geq 0 : U_t^{\pi, q} \geq u_s\}.$$

根据 Itô 引理有

$$\begin{aligned} &h(U_{\tau_\alpha \wedge \tau \wedge t}^{\pi, q}, M_{\tau_\alpha \wedge \tau \wedge t}^{\pi, q}) \\ &= h(u, m) + \int_0^{\tau_\alpha \wedge \tau \wedge t} \{[rU_s^{\pi, q} + (\mu + \sigma\beta_s^* - r)\pi_s + (q_s\eta - \eta + \theta)a + q_s\gamma_s^*b]h_u\} ds \\ &\quad + \int_0^{\tau_\alpha \wedge \tau \wedge t} \left[\frac{1}{2}\sigma^2\pi_s^2h_{uu} + \frac{1}{2}b^2q_s^2h_{uu} \right] ds \\ &\quad + \int_0^{\tau_\alpha \wedge \tau \wedge t} h_u(U_s^{\pi, q}, M_s^{\pi, q})[\sigma\pi_s dB_s^{Q^*} + q_sbdW_s^{Q^*}] \\ &\quad + \int_0^{\tau_\alpha \wedge \tau \wedge t} h_m(U_s^{\pi, q}, M_s^{\pi, q})dM_s^{\pi, q}. \end{aligned}$$

与步骤 1 类似, Itô 公式中第三个积分由于 h_u 和 II, \mathbf{Q} 在区间 $[\alpha m, \min\{u_s, m\}]$ 上有界, 关于 Q^* 取期望后为 0; 第四个积分在 $u_s \leq m$ 时 $M_t^{\pi, q} = U_t^{\pi, q}$, 而在 $m < u_s$ 时 $h_m m, m = 0$. 所以在 Q^* 下对等式两边取期望得到

$$\begin{aligned} &E^{Q^*}[h(U_{\tau_\alpha \wedge \tau \wedge t}^{\pi, q}, M_{\tau_\alpha \wedge \tau \wedge t}^{\pi, q})] \\ &= h(u, m) + E^{Q^*} \left[\int_0^{\tau_\alpha \wedge \tau \wedge t} \{[rU_s^{\pi, q} + (\mu + \sigma\beta_s^* - r)\pi_s + (q_s\eta - \eta + \theta)a + q_s\gamma_s^*b]h_u\} ds \right] \\ &\quad + E^{Q^*} \left[\int_0^{\tau_\alpha \wedge \tau \wedge t} \left(\frac{1}{2}\sigma^2\pi_s^2h_{uu} + \frac{1}{2}b^2q_s^2h_{uu} \right) ds \right], \end{aligned}$$

其中 Itô 积分消失. 根据条件 (2), (4) 和 β_t^* 和 γ_t^* 定义有

$$\begin{aligned} 0 &= \inf_{\pi, q} \sup_{\beta, \gamma} \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon}\beta^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\gamma^2 + [rU_s^{\pi, q} + (\mu + \sigma\beta - r)\pi_s \right. \\ &\quad \left. + (q_s\eta - \eta + \theta)a]h_u + \frac{1}{2}\sigma^2\pi_s^2h_{uu} + \frac{1}{2}b^2q_s^2h_{uu} \right\} \\ &\leq \sup_{\beta, \gamma} \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon}\beta^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\gamma^2 + [rU_s^{\pi, q} + (\mu + \sigma\beta - r)\pi_s \right. \\ &\quad \left. + (q_s\eta - \eta + \theta)a]h_u + \frac{1}{2}\sigma^2\pi_s^2h_{uu} + \frac{1}{2}b^2q_s^2h_{uu} \right\} \\ &= -\frac{1}{2\varepsilon}(\beta_s^*)^2 - \frac{1}{2\varepsilon}(\gamma_s^*)^2 + [rU_s^{\pi, q} + (\mu + \sigma\beta_s^* - r)\pi_s \\ &\quad + (q_s\eta - \eta + \theta)a]h_u + \frac{1}{2}\sigma^2\pi_s^2h_{uu} + \frac{1}{2}b^2q_s^2h_{uu}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

所以有

$$E^{Q^*}[h(U_{\tau_\alpha \wedge \tau \wedge t}^{\pi, q}, M_{\tau_\alpha \wedge \tau \wedge t}^{\pi, q})] \geq h(u, m) + E^{Q^*} \left[\int_0^{\tau_\alpha \wedge \tau \wedge t} \left(\frac{1}{2\varepsilon}(\beta_s^*)^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(\gamma_s^*)^2 \right) ds \right]. \tag{B.2}$$

令 $t \rightarrow \infty$, 并根据有界和单调收敛定理得到

$$E^{Q^*}[h(U_{\tau_\alpha \wedge t}^{\pi, q}, M_{\tau_\alpha \wedge t}^{\pi, q})] \geq h(u, m) + E^{Q^*}\left[\int_0^{\tau_\alpha \wedge t} \left(\frac{1}{2\varepsilon}(\beta_s^*)^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(\gamma_s^*)^2\right) ds\right]. \quad (\text{B.3})$$

因为 $h(U_{\tau_\alpha \wedge \tau}^{\pi, q}, M_{\tau_\alpha \wedge \tau}^{\pi, q}) = 1_{\{\tau_\alpha \leq \tau\}} \leq 1_{\{\tau_\alpha < \infty\}}$, 我们得到

$$h(u, m) \leq E^{Q^*}\left[1_{\{\tau_\alpha < \infty\}} - \frac{1}{2}\int_0^{\tau_\alpha \wedge \tau} \left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_s^*)^2 + \frac{1}{\varepsilon}(\gamma_s^*)^2\right) ds\right]. \quad (\text{B.4})$$

先假设 π 和 q 为可容许策略, 使得一旦发生 drawdown 或者财富达到安全水平有 $\pi = 0, q = 0$, 记 \mathcal{D}_0 为这些策略的集合. 根据条件 (5), 对 $\tau_\alpha \wedge \tau < s < \tau_\alpha$ 有 $\beta_s^* = 0, \gamma_s^* = 0$. 因为对任意 $\pi, q \in \mathcal{D}_0$ 有

$$\begin{aligned} h(u, m) &\leq E^{Q^*}\left[1_{\{\tau_\alpha < \infty\}} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau_\alpha \wedge \tau} \left(\frac{1}{2}(\beta_s^*)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_s^*)^2\right) ds\right] \\ &\leq \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^{Q^*}\left[1_{\{\tau_\alpha < \infty\}} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau_\alpha} \left(\frac{1}{2}(\beta_s^*)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_s^*)^2\right) ds\right], \end{aligned}$$

所以有 $h(u, m) \leq \inf_{\pi, q \in \mathcal{D}_0} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^{Q^*}\left[1_{\{\tau_\alpha < \infty\}} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau_\alpha} \left(\frac{1}{2}(\beta_s^*)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_s^*)^2\right) ds\right]$. 这里我们需要注

意的是, $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0$ 中的控制不会产生较小的信息. 因为 drawdown 一旦发生, 就变成无法更改的现实; 一旦达到安全水平, 不采取任何策略是最好的选择. 因此实际上我们有

$$h(u, m) \leq \inf_{\pi, q \in \mathcal{D}} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^{Q^*}\left[1_{\{\tau_\alpha < \infty\}} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau_\alpha} \left(\frac{1}{2}(\beta_s^*)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_s^*)^2\right) ds\right] = \psi(u, m).$$

步骤 3 设 $\pi^* := \Pi(U^{\Pi, Q})$, $q^* := Q(U^{\Pi, Q})$, 并且 $\beta^* := \mathbf{B}(\Pi(U^{\Pi, Q}), U^{\Pi, Q})$, $\gamma^* := \Gamma(Q(U^{\Pi, Q}), U^{\Pi, Q})$, 用控制 $\pi^*, q^*, \beta^*, \gamma^*$ 重复步骤二的分析, (B.1)–(B.3) 现在相等. 对于 (B.4) 式, 由于 $\pi^*, q^*, \beta^*, \gamma^*$ 都将为 0, 有 $\{\tau_\alpha^* < \tau^*\} = \{\tau_\alpha^* < \infty\}$. 可以得到

$$\psi(u, m) = h(u, m) = E^{Q^*}\left[1_{\{\tau_\alpha^* < \infty\}} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau_\alpha^*} \left(\frac{1}{2}(\beta_s^*)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_s^*)^2\right) ds\right],$$

其中 τ_α^* 和 τ^* 分别记为盈余过程从 u 开始, 并受 π^* 和 q^* 控制的 drawdown 时刻和到达安全水平时刻的最小值. 这证明了反馈形式的最优性. 证毕. |

Optimal Investment and Proportional Reinsurance Strategies to Minimize the Probability of Drawdown Under Ambiguity Aversion

Zhao Yuying Wen Yuzhen
(School of Statistics, Qufu Normal University, Shandong Qufu 273165)

Abstract: In this paper, we consider the optimal investment and reinsurance control problem for insurers with ambiguity, and we obtain the minimum drawdown probability, optimal robust investment-reinsurance strategies and the associated drift distortion. Moreover, some numerical examples are presented to show the impact of model parameters on the optimal results.

Key words: Ambiguity aversion; Probability of drawdown; Optimal robust investment and reinsurance strategies; Drift distortion.

MR(2010) Subject Classification: 91B30; 93D09