数学物理学报 Acta Mathematica Scientia

2020,**40A**(6):1409–1419 http://actams.wipm.ac.cn

Fock 型空间上的广义不确定原理

吴海桂 梁玉霞 *

(天津师范大学数学科学学院 天津 300387)

摘要：该文利用单边加权移位算子构造了广泛的自伴算子对，进而给出了 Fock 型空间上广义不确定原理的表达式及其等号成立的条件．该结果推广了依赖于求导算子和乘法算子的不确定原理表达形式，可为解决量子力学等前沿学科的相关热点问题提供理论依据.

关键词：Fock 型空间；不确定原理；自伴算子；单边加权移位算子.

MR(2010) 主题分类：47B38; 32A37 **中图分类号**：O177.1 **文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2020)06-1409-11

1 引言

Fock 型空间是定义在无界域上的全纯函数空间，同时也是一类重要的 Hilbert 空间. Fock 型空间与量子理论有着密切的联系．例如，稠定义在经典 Fock 空间上的微分算子被称为量子理论中的湮灭算子，其形式对偶为乘法算子，乘法算子又被称为量子理论中的产生算子．有关 Fock 型空间的研究已经有几十年的历史了，起初经典的 Fock 空间是由 Bargmann 在文献 [1] 中引入，之后很多学者对其展开了广泛的研究． Fock 型空间做为一类重要的解析函数空间，其上线性算子的许多经典性质 (比如有界性、紧性、等距) 得到了很系统的研究，近期的相关结果可参考文献 [2–6] 等．近几年，四元数 Fock 型空间上算子性质的研究也受到了很多学者的关注．基于文献 [7] 给出的四元数 Fock 型空间的定义和空间的一些重要性质，文献 [8–9] 系统研究了四元数 Fock 型空间上加权复合算子的经典性质的等价刻画条件．更多的关于 Fock 型空间及其上经典线性算子性态的研究成果可参阅经典书目 [10].

海森堡不确定原理是量子力学中一个重要基本原理，主要应用于时频分析及解析信号分析等实际问题求解中．在量子力学里，德国物理学家海森堡于 1927 年提出：粒子的位置与动量不可能同时被确定，即一个微观粒子的某些物理量不可能同时具有确定的数值，其中一个量越确定，则另一个量的不确定程度就越大．比如，一个粒子位置的不确定性和速度的不确定性的乘积总是大于或等于一个很小的正常量 $h/(4\pi)$, 其中 h 为普朗克常量．当然这种不确定原理在能量和时间、角动量和角度等物理量之间也是存在的，详见文献 [11].

本文将 Fock 型空间与 Hilbert 空间上的不确定原理相结合，给出了 Fock 型空间上一个比较广泛的不确定原理表达形式．本文的写作主要基于 2015 年陈泳和朱克和教授在《中国

收稿日期: 2019-10-08; 修订日期: 2020-01-17

E-mail: 1239018786@qq.com; liangyx1986@126.com

基金项目：国家自然科学基金 (11701422)

Supported by the NSFC (11701422)

* 通讯作者

科学：数学》上发表的经典 Fock 空间 F^2 上的一种不确定原理的特殊表达式，参见文献 [12, 定理 4]. 2018 年，文章 [13] 利用类似的方法给出了 Fock 型空间 F_α^2 $(\alpha>0)$ 上的一种不确定原理的特殊表达式，参见文献 [13, 定理 3]. 鉴于求导算子和乘法算子是量子理论等前沿学科研究中非常重要的两个线性算子，上述结果都是巧妙地借助于这两个算子得到了不确定原理在 Fock 空间中的具体表示形式．通过进一步分析演算发现：作用于经典 Fock 空间 F^2 上的求导算子和乘法算子都是特殊的单边加权移位算子，其中求导算子对应的单边加权移位算子的权序列为 $\{\sqrt{n}\}_{n=0}^{\infty}$. 基于以上研究结果及分析，本文继续利用单边加权移位算子构造自伴算子对，给出了 Fock 型空间上广泛的不确定原理表达式.

下面对本文用到的符号加以说明．记 $\mathbb{C}$ 为复数集， $H(\mathbb{C})$ 表示 $\mathbb{C}$ 上全体整函数组成的集合． $\mathbb{R}$ 为实数集， $\mathbb{R}^+$ 表示正实数集．对于任意的参数 $\alpha>0$, 定义 $\mathbb{C}$ 上的高斯测度

$$\mathrm{d}\lambda_\alpha(z)=\frac{\alpha}{\pi}e^{-\alpha|z|^2}\mathrm{d}A(z),$$

其中 $\mathrm{d}A(z)=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 Lebesgue 面积测度.

借助上述高斯测度，下面将给出本文研究的 Fock 型空间的定义．首先，给定 $\alpha>0$, 在 $\mathbb{C}$ 上关于 $\mathrm{d}\lambda_\alpha$ 绝对值平方可积的可测函数全体组成如下空间

$$L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\lambda_\alpha)=\left\{f:\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}\lambda_\alpha<\infty\right\}.$$

定义 1.1 给定 $\alpha>0$, Fock 型空间 F_α^2 (又称为 α-Fock 空间) 定义为 $L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\lambda_\alpha)$ 的闭子空间，表示为

$$F_\alpha^2:=\left\{f\in H(\mathbb{C}):\ \|f\|_{2,\alpha}:=\left(\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{1/2}<\infty\right\}.$$

注 1.1 (i) F_α^2 在范数 $\|f\|_{2,\alpha}$ 的定义下是一个内积空间，其上的内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{C}}f\overline{g}\mathrm{d}\lambda_\alpha.$$

特别地， $\alpha=1$ 时， F_1^2 就是经典的 Fock 空间，记为 F^2.

(ii) 文献 [10, 命题 2.1] 中给出了 F_α^2 的一组正规正交基为

$$e_n(z)=\sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}}z^n,n=0,1,2,\cdots.$$

于是对于任意 $f\in F_\alpha^2$, 其级数表达式为 $f=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ne_n$, 并具有范数 $\|f\|_{2,\alpha}^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2$.

2 主要结果

文献 [14, 命题 2.1] 中给出了一般 Hilbert 空间 H 上抽象的不确定原理表达形式．在泛函分析中，如果 Hilbert 空间 H 上的线性算子 A 等于自身的伴随算子 A^*, 并且 A 与 A^* 的定义域相同，则称其为自伴算子.

定理 2.1 设 A 与 B 是 Hilbert 空间 H 上的两个可能无界的自伴算子，那么对于任意的 $f\in Dom(AB)\bigcap Dom(BA),a,b\in\mathbb{R}$, 有

$$||(A-a)f||\cdot||(B-b)f||\geq\frac{1}{2}|\langle[A,B]f,f\rangle|,\tag{2.1}$$

其中 $[A,B]=AB-BA$ 是算子 A 和 B 的换位子， $Dom(BA)$ 表示算子 BA 的定义域. 此外， (2.1) 式中等号成立当且仅当

$$(A-a)f=\mathrm{i}c(B-b)f,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

注 2.1 (i) 如果假设 (2.1) 式对于 $a=b=0$ 成立，即 $\|Af\|\cdot\|Bf\|\geq 1/2|\langle[A,B]f,f\rangle|$. 由于自伴算子 A 和 B 减去恒等算子的倍数不影响 A 和 B 的换位子，即

$$[A-a,B-b]=[A,B].$$

于是用 $A-a,B-b$ $(a,b\in\mathbb{R})$ 代替 A,B 可得 (2.1) 式对于任意的 $a,b\in\mathbb{R}$ 都成立.

(ii) 如果自伴算子对 A 和 B 能够使得 $[A,B]=\lambda I$, 即为恒等算子的常数倍，那么就能够由这对自伴算子推导出不确定原理的表达形式为

$$||(A-a)f||\cdot||(B-b)f||\geq\frac{1}{2}|\lambda|\cdot||f||^2.$$

基于 Fock 型空间上求导算子和乘法算子的重要性，文献 [12] 借助这两个典型线性算子构造了两个自伴算子，从而给出了经典 Fock 空间上不确定原理的第一个具体表示形式.

定理 A 令 $f\in F^2$, 则对于所有 $a,\ b\in\mathbb{R}$ 有

$$\|f'(z)+zf(z)-af(z)\|\cdot\|f'(z)-zf(z)-\mathrm{i}bf(z)\|\geqslant\|f\|^2,$$

等式成立当且仅当存在正数 c 和复数 C 使得

$$f(z)=C\exp\left(\frac{c-1}{2(c+1)}z^2+\frac{a-\mathrm{i}bc}{c+1}z\right).$$

2018 年，文献 [13] 将定理 A 的结果推广到了 Fock 型空间 F^2_α 上，得到了不确定原理的又一个具体表示形式.

定理 B 对任意的 $\alpha>0$, 令 $f\in F^2_\alpha$, 则对任意的 $a,b\in\mathbb{R}$, 有

$$\left|\left|\frac{1}{\alpha}f'(z)+zf(z)-af(z)\right|\right|_{2,\alpha}\cdot\left|\left|\frac{1}{\alpha}f'(z)-zf(z)+\mathrm{i}bf(z)\right|\right|_{2,\alpha}\geq\frac{1}{\alpha}||f||^2_{2,\alpha}. \tag{2.2}$$

等式成立当且仅当存在 $c\in\mathbb{R}^+$ 和 $C'\in\mathbb{C}$, 使得

$$f(z)=C'\exp\Big(\frac{\alpha(c-1)}{2(c+1)}z^2+\frac{\alpha(a-\mathrm{i}bc)}{c+1}z\Big). \tag{2.3}$$

基于上述两个重要结果，本文将求导算子和乘法算子看成特别的单边加权移位算子，并给出了广义不确定原理的表达式. 下面给出一般 Hilbert 空间 H 上的单边加权左移位算子和单边加权右移位算子的定义.

定义 2.1 设 H 是一个 Hilbert 空间， $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ 是 H 上的一组正规正交基， $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 是一个复数序列，定义线性算子 $T:\ H\to H$ 使得

$$Te_0=0,\ Te_n=u_ne_{n-1},\ n=1,2,\cdots, \tag{2.4}$$

则称 T 是单边加权左移位算子，具有权序列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$.

类似地，给定复数序列 $\{w_n\}_{n=1}^\infty$, 定义线性算子 $W:\ H\to H$ 使得

$$We_n=w_{n+1}e_{n+1},\ n=0,1,2,\cdots,$$

则称 W 是单边加权右移位算子，具有权序列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$.

基于定义式 (2.4), 计算 T 的共轭算子 T^*, 由

$$\langle Te_n, e_{n-1}\rangle = \langle u_n e_{n-1}, e_{n-1}\rangle = u_n = \langle e_n, \overline{u_n} e_n\rangle,$$

从而 T 的共轭算子 T^* 为

$$T^* e_n = \overline{u_{n+1}} e_{n+1},\ n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2.5}$$

给定任意的函数 $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e_n \in F_{\alpha}^2$, 求导算子 $Df(z) = f'(z)$ 可表示为

$$Df(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\alpha(n+1)} a_{n+1} e_n(z).$$

特别地，当 $f = e_n$ 可得

$$De_0 = 0,\ De_n = \sqrt{n\alpha} e_{n-1},\ n = 1, 2, \cdots. \tag{2.6}$$

对于乘法算子类似可得

$$ze_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\alpha}} e_{n+1}(z). \tag{2.7}$$

注 2.2 (i) 当 (2.4) 式中的权序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 取正实数序列 $\{\sqrt{n\alpha}\}_{n=1}^{\infty}$ 可得 (2.6) 式. 即求导算子是特殊权的单边加权左移位算子.

(ii) 由 (2.5) 式可得权序列为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的单边加权左移位算子 T 的共轭算子 T^* 是权序列为 $\{\overline{u_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 的单边加权右移位算子.

引理 2.1 令函数 $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e_n \in F_{\alpha}^2$, 则单边加权左移位算子 T 及其共轭算子 T^* 作用于 f 的表达式分别为

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n e_{n-1}, \quad T^* f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{u_{n+1}} e_{n+1}.$$

证 因为 T 为线性算子，所以

$$Tf = T\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Te_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n e_{n-1}.$$

利用共轭算子的定义得到

$$\begin{aligned}
\langle Tf, f\rangle &= \left\langle T\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n\right\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n e_{n-1}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} u_{n+1} e_n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} u_{n+1} \overline{a_n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \overline{a_{n-1}} = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \overline{u_n} e_n\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{u_{n+1}} e_{n+1}\right\rangle = \langle f, T^* f\rangle,
\end{aligned}$$

从而

$$T^*f=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overline{u_{n+1}}e_{n+1}.$$

引理 2.1 证毕. ▌

定理 2.1 中的不确定原理要求算子 A 和 B 是 Hilbert 空间上的两个自伴算子. 本文借助单边加权左移位算子 T 和它的共轭算子 T^* 构造如下两个自伴算子

$$A=T+T^*,\ B=\mathrm{i}(T-T^*).$$

引理 2.2 假设 T 是权序列为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的单边加权左移位算子, 其权序列满足 $|u_n|^2=n\lambda,\ n=1,2,\cdots,\ \lambda$ 是一个正常数, 则 A 和 B 的换位子为

$$[A,B]=-2\mathrm{i}\lambda I,$$

其中 I 为 F_α^2 上的恒等算子.

证 由自伴算子 A 和 B 的定义可得

$$\begin{aligned}[A,B]&=AB-BA\\&=\mathrm{i}[(T+T^*)(T-T^*)-(T-T^*)(T+T^*)]\\&=2\mathrm{i}(T^*T-TT^*).\end{aligned}\tag{2.8}$$

对于任意函数 $f=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ne_n\in F_\alpha^2$, 由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}(TT^*-T^*T)f&=T(T^*f)-T^*(Tf)\\&=T\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overline{u_{n+1}}e_{n+1}-T^*\sum_{n=1}^{\infty}a_nu_ne_{n-1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n|u_{n+1}|^2e_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_n|u_n|^2e_n\\&=a_0|u_1|^2e_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(|u_{n+1}|^2-|u_n|^2)e_n.\end{aligned}\tag{2.9}$$

将权序列 $|u_n|^2=n\lambda,\ n=1,2,\cdots$ 代入 (2.9) 式得到

$$(TT^*-T^*T)f=a_0\lambda e_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda e_n=\lambda f.\tag{2.10}$$

结合 (2.8) 式和 (2.10) 式得到

$$[A,B]f=2\mathrm{i}(T^*T-TT^*)f=-2\mathrm{i}\lambda f.\tag{2.11}$$

由于 $f\in F_\alpha^2$ 的任意性, (2.11) 式表明 $[A,B]=-2\mathrm{i}\lambda I$ 成立. 引理 2.2 证毕. ▌

基于上述几个引理, 下面给出 Fock 型空间上广义不确定原理的表达形式. 为了简化后面定理的书写, 现记

$$\sum_{i_1=k}^{l}a_{i_1}\diamond\sum_{i_2=m}^{n}b_{i_2}:=\sum_{i_1=k}^{l}\left[a_{i_1}\left(\sum_{i_2=m}^{n}b_{i_2}\right)\right],\quad k\le l,m\le n.$$

定理 2.2 假设 T 是权序列为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的单边加权左移位算子，其权序列满足 $|u_n|^2 = n\lambda,\ n=1,2,\cdots,\ \lambda$ 是一个正常数. 定义两个自伴算子 $A=T+T^*,\ B=\mathrm{i}(T-T^*)$. 对于任意的 $\alpha>0,\ a,b\in\mathbb{R}$ 和 $f\in F_\alpha^2$ 成立

$$||(A-a)f||_{2,\alpha}\cdot||(B-b)f||_{2,\alpha}\geq\lambda||f||_{2,\alpha}^2. \tag{2.12}$$

此外， (2.12) 式的等号成立当且仅当存在 $c\in\mathbb{R}^+$ 和 $C\in\mathbb{C}$ 使得

$$f=C\sum_{n=0}^{\infty}a_ne_n, \tag{2.13}$$

其系数 $a_n(n\geq1)$ 满足

$$a_n=\begin{cases} c_n\sum\limits_{d=0}^{\frac{n-1}{2}}p^{n-2d}\hat{c}^d\Bigg(\sum\limits_{i_1=2d-1}^{n-1}|u_{i_1}|^2\diamond\sum\limits_{i_2=2d-3}^{i_1-2}|u_{i_2}|^2\diamond\cdots\diamond\sum\limits_{i_{\frac{n-1}{2}}=1}^{i_{\frac{n-1}{2}-1}-2}|u_{i_{\frac{n-1}{2}}}|^2\Bigg), & n\ \text{为奇数},\\ c_n\sum\limits_{d=0}^{\frac{n}{2}}p^{n-2d}\hat{c}^d\Bigg(\sum\limits_{i_1=2d-1}^{n-1}|u_{i_1}|^2\diamond\sum\limits_{i_2=2d-3}^{i_1-2}|u_{i_2}|^2\diamond\cdots\diamond\sum\limits_{i_{\frac{n}{2}}=1}^{i_{\frac{n}{2}-1}-2}|u_{i_{\frac{n}{2}}}|^2\Bigg), & n\ \text{为偶数}, \end{cases} \tag{2.14}$$

其中

$$p=a-\mathrm{i}bc,\ \hat{c}=c^2-1,c_0\in\mathbb{C},\ c_n=\frac{a_0}{(1+c)^n\prod\limits_{i=1}^{n}u_i},\ n\geq1, \tag{2.15}$$

这里当 $c=-1$ 时， $a_0=0$, 当 $c\neq-1,\ a_0\in\mathbb{C}$. 同时规定 $a_n(n\geq1)$: 当 $i_{l-1}>0,\ i_l<0$ ($l\in\{1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}\}$ 或 $l\in\{1,2,\cdots,\frac{n}{2}\}$) 时，有

$$\sum_{i_l=2d-(2l-1)}^{i_{l-1}-2}|u_{i_l}|^2\diamond\cdots\diamond\sum_{i_{\frac{n-1}{2}}=1}^{i_{\frac{n-1}{2}-1}-2}|u_{i_{\frac{n-1}{2}}}|^2=1\ \text{或}\ \sum_{i_l=2d-(2l-1)}^{i_{l-1}-2}|u_{i_l}|^2\diamond\cdots\diamond\sum_{i_{\frac{n}{2}}=1}^{i_{\frac{n}{2}-1}-2}|u_{i_{\frac{n}{2}}}|^2=1.$$

证 对于任意的 $f\in F_\alpha^2$ 和自伴算子对 $A,\ B$, 由定理条件并借助定理 2.1 、引理 2.1(ii) 及引理 2.2 可得

$$||(A-a)f||_{2,\alpha}\cdot||(B-b)f||_{2,\alpha}\geq\frac{1}{2}|\langle[A,B]f,f\rangle|=\lambda||f||_{2,\alpha}^2.$$

于是给出了 Fock 型空间上不确定原理的广义表达式 (2.12).

下面详细讨论 (2.12) 式等号成立的条件. 根据定理 2.1 知 (2.12) 式中等号成立当且仅当

$$(A-a)f=\mathrm{i}c(B-b)f,\ c\in\mathbb{R}.$$

即

$$(T+T^*-a)\sum_{n=0}^{\infty}a_ne_n=\mathrm{i}c(\mathrm{i}(T-T^*)-b)\sum_{n=0}^{\infty}a_ne_n.$$

利用引理 2.1, 上式变形为

$$(1+c)\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}u_{n+1}e_n+(1-c)\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\overline{u_n}e_n=(a-\mathrm{i}bc)\sum_{n=0}^{\infty}a_ne_n.$$

由于 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 F_{α}^2 的一组正规正交基，解上式得到方程组

$$\begin{cases}(1+c)a_1u_1=(a-\mathrm{i}bc)a_0, & (2.16)\\ (1+c)a_{n+1}u_{n+1}+(1-c)a_{n-1}\overline{u}_n=(a-\mathrm{i}bc)a_n,\ n\geq 1. & (2.17)\end{cases}$$

下面分情况讨论 $c\in\mathbb{R}$ 的取值，进而给出了满足等式的函数 f 的系数 a_n 表达式.

情形 (1) $c=-1$ 时，(2.16) 式和 (2.17) 式分别变形为

$$\begin{cases}0=(a+\mathrm{i}b)a_0, & (2.18)\\ 2a_{n-1}\overline{u_n}=(a+\mathrm{i}b)a_n,\ n\geq 1. & (2.19)\end{cases}$$

由 (2.18) 式，可以得到 $a=-\mathrm{i}b$ 和 $a_0=0$ 中至少有一个成立，具体分析如下：

(i) 若 $a=-\mathrm{i}b$, 则由 (2.19) 式可得 $a_{n-1}=0,\ n\geq 1$, 此时包含 $a_0=0$ 的情形. 即 $a=-\mathrm{i}b$, 则 $f\equiv 0$, 此时为平凡情形.

(ii) 若 $a_0=0$ 但 $a\neq -\mathrm{i}b$, 则由 (2.19) 式可得

$$a_n=\frac{2a_{n-1}\overline{u_n}}{a+\mathrm{i}b}=0,\ n\geq 1.$$

依然成立 $f\equiv 0$, 也为平凡情形.

综合情形 (1) 的以上两种分类情况得：当 $c=-1$ 时，只有函数 $f\equiv 0$ 才能使得 (2.12) 式的等号成立. 此时对应函数 (2.13) 式中 $C=0$ 即可.

情形 (2) $c=1$ 时，(2.16) 式和 (2.17) 式变形为

$$\begin{cases}2a_1u_1=(a-\mathrm{i}b)a_0, & (2.20)\\ 2a_{n+1}u_{n+1}=(a-\mathrm{i}b)a_n,\ n\geq 1. & (2.21)\end{cases}$$

(i) 当 $a_0=0$ 时，由 (2.20) 式和 (2.21) 式可得 $a_n=0,\ n\geq 1$, 故 $f\equiv 0$, 此时为平凡情形.

(ii) 当 $a_0\neq 0$ 时，(2.21) 式可化为

$$a_n=a_0\frac{(a-\mathrm{i}b)^n}{2^n u_1u_2\cdots u_n}\ ,n\geq 1. \tag{2.22}$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|^2}{|a_n|^2}&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(a^2+b^2)^{n+1}}{2^{2(n+1)}|u_1|^2|u_2|^2\cdots|u_{n+1}|^2}\Big/\frac{(a^2+b^2)^n}{2^{2n}|u_1|^2|u_2|^2\cdots|u_n|^2}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2+b^2}{4|u_{n+1}|^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2+b^2}{4(n+1)\lambda}=0<1,\end{aligned}$$

从而

$$\|f\|_{2,\alpha}^2=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<+\infty.$$

于是对于任意复常数 C, 函数

$$f=C\left(a_0+a_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-\mathrm{i}b)^n}{2^n u_1u_2\cdots u_n}e_n\right) \tag{2.23}$$

都使得 (2.12) 式等号成立.

综合情形 (2) 的以上两种分类情况得：当 $c=1$ 时，只有 (2.23) 式中定义的函数 f 才能使得 (2.12) 式的等号成立，这里 $a_0\in\mathbb{C}$.

进一步验证， $c=1$ 时 a_n 的表达式 (2.22) 也满足 (2.14) 式．事实上， $c=1$ 对应于 (2.14) 式中 $\hat{c}=0$. 无论 n 为奇数还是偶数， a_n 的表达式都只剩下对应于 $d=0$ 这一项．此时得到的特殊 a_n 表达式就是 (2.22) 式.

情形 (3)　当 $|c|\neq 1$ 时,在 (2.15) 式的记号下直接计算可得 $a_1=c_1p,\ a_2=c_2\left(p^2+\hat{c}|u_1|^2\right)$. 现假设系数 a_n 的表达式满足 (2.14) 式及规定，下证 a_{n+1} 的表达式也满足 (2.14) 式及规定.

(i) 设 n 为偶数，则 $n+1$ 为奇数，利用 (2.17) 式来求解 a_{n+1}.

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=\frac{(c-1)\overline{u_n}a_{n-1}+(a-\mathrm{i}bc)a_n}{(1+c)u_{n+1}}\\
&=\frac{1}{(1+c)u_{n+1}}\Bigg\{(c-1)\overline{u_n}\Bigg[c_{n-1}\sum_{d=0}^{\frac{n-2}{2}}p^{n-1-2d}\hat{c}^d\Bigg(\sum_{i_1=2d-1}^{n-2}|u_{i_1}|^2\diamond\sum_{i_2=2d-3}^{i_1-2}|u_{i_2}|^2\\
&\quad\diamond\cdots\diamond\sum_{i_{\frac{n-2}{2}}=1}^{i_{\frac{n-2}{2}-1}-2}|u_{i_{\frac{n-2}{2}}}|^2\Bigg)\Bigg]\\
&\quad+pc_n\sum_{d=0}^{\frac{n}{2}}p^{n-2d}\hat{c}^d\Bigg(\sum_{i_1=2d-1}^{n-1}|u_{i_1}|^2\diamond\sum_{i_2=2d-3}^{i_1-2}|u_{i_2}|^2\diamond\cdots\diamond\sum_{i_{\frac{n}{2}}=1}^{i_{\frac{n}{2}-1}-2}|u_{i_{\frac{n}{2}}}|^2\Bigg)\Bigg\}\\
&=\frac{1}{(1+c)u_{n+1}}\Bigg\{|u_n|^2\Bigg[c_n\sum_{d=0}^{\frac{n-2}{2}}p^{n-1-2d}\hat{c}^{d+1}\Bigg(\sum_{i_1=2d-1}^{n-2}|u_{i_1}|^2\diamond\sum_{i_2=2d-3}^{i_1-2}|u_{i_2}|^2\\
&\quad\diamond\cdots\diamond\sum_{i_{\frac{n-2}{2}}=1}^{i_{\frac{n-2}{2}-1}-2}|u_{i_{\frac{n-2}{2}}}|^2\Bigg)\Bigg]\\
&\quad+c_n\sum_{d=0}^{\frac{n}{2}}p^{n-2d+1}\hat{c}^d\Bigg(\sum_{i_1=2d-1}^{n-1}|u_{i_1}|^2\diamond\sum_{i_2=2d-3}^{i_1-2}|u_{i_2}|^2\diamond\cdots\diamond\sum_{i_{\frac{n}{2}}=1}^{i_{\frac{n}{2}-1}-2}|u_{i_{\frac{n}{2}}}|^2\Bigg)\Bigg\}\\
&=c_{n+1}\Bigg[|u_n|^2\sum_{d=0}^{\frac{n-2}{2}}p^{n-1-2d}\hat{c}^{d+1}\Bigg(\sum_{i_1=2d-1}^{n-2}|u_{i_1}|^2\diamond\sum_{i_2=2d-3}^{i_1-2}|u_{i_2}|^2\diamond\cdots\diamond\sum_{i_{\frac{n-2}{2}}=1}^{i_{\frac{n-2}{2}-1}-2}|u_{i_{\frac{n-2}{2}}}|^2\Bigg) \qquad (2.24)\\
&\quad+\sum_{d=0}^{\frac{n}{2}}p^{n-2d+1}\hat{c}^d\Bigg(\sum_{i_1=2d-1}^{n-1}|u_{i_1}|^2\diamond\sum_{i_2=2d-3}^{i_1-2}|u_{i_2}|^2\diamond\cdots\diamond\sum_{i_{\frac{n}{2}}=1}^{i_{\frac{n}{2}-1}-2}|u_{i_{\frac{n}{2}}}|^2\Bigg)\Bigg] \qquad (2.25)\\
&=c_{n+1}\sum_{d=0}^{\frac{n}{2}}p^{n-2d+1}\hat{c}^d\Bigg(\sum_{i_1=2d-1}^{n}|u_{i_1}|^2\diamond\sum_{i_2=2d-3}^{i_1-2}|u_{i_2}|^2\diamond\cdots\diamond\sum_{i_{\frac{n}{2}}=1}^{i_{\frac{n}{2}-1}-2}|u_{i_{\frac{n}{2}}}|^2\Bigg),
\end{aligned}$$

并且满足 a_{n+1} 的规定．在上面计算中，最后一个等式成立的原因是 (2.24) 式的方括号里第一个求和号当 $d=k$ 时的值可以和 (2.25) 式中的第一个求和号当 $d=k+1$ 时的值合并，从而可以计算得到 a_{n+1} 的表达式.

(ii) 同理可证当 n 为奇数时， a_{n+1} 的表达式也满足 (2.14) 式 (当 n 取 $n+1$ 时). 因此，根据数学归纳法可得 a_n 的表达式为 (2.14) 式，并满足 a_n 的 规定.

基于 (2.14) 式，下面通过分析 $f=C\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ne_n\in F_\alpha^2$ 来给出参数 c 的取值范围.

(i) 若 $a_0=0$, 则由 (2.14) 式得到 $a_n=0,\ n=1,2,\cdots$, 从而 $f\equiv 0$, 此时为平凡情形.

(ii) 若 $a_0\neq 0$, 由于 $f\in F_\alpha^2$ 等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<+\infty. \tag{2.26}$$

由注 2.1(i), 下面只需要证明当 $a=b=0$ 时， (2.26) 式成立即可．此时 $p=0$, 并且令 $0^0=1$, 则 a_n $(n\geq 1)$ 有着如下比较简单的表达式

$$a_n=\begin{cases}0, & n \text{ 为奇数},\\ c_n\hat{c}^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}}|u_{2k-1}|^2, & n \text{ 为偶数}.\end{cases} \tag{2.27}$$

此时 (2.26) 式等价于

$$|a_0|^2+\sum_{m=0}^{\infty}|a_{2m}|^2<+\infty.$$

将记号 (2.15) 代入具体计算为

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}|a_{2m}|^2&=|a_0|^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|c^2-1|^{2m}}{|1+c|^{4m}}\left(\frac{|u_1|^2|u_3|^2\cdots|u_{2m-1}|^2}{|u_1||u_2|\cdots|u_{2m}|}\right)^2\\&=|a_0|^2\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{1-c}{1+c}\right|^{2m}\frac{|u_1|^2|u_3|^2\cdots|u_{2m-1}|^2}{|u_2|^2|u_4|^2\cdots|u_{2m}|^2}\\&=|a_0|^2\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{1-c}{1+c}\right|^{2m}\frac{k\cdot 3k\cdots(2m-1)k}{2k\cdot 4k\cdots 2mk}\\&=|a_0|^2\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{1-c}{1+c}\right|^{2m}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!},\end{aligned}$$

利用级数的比式判别法可得当

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\frac{|a_{2(m+1)}|^2}{|a_{2m}|^2}&=\lim_{m\to\infty}\left[\left|\frac{1-c}{1+c}\right|^{2(m+1)}\frac{(2(m+1)-1)!!}{(2(m+1))!!}\right]\Big/\left[\left|\frac{1-c}{1+c}\right|^{2m}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\right]\\&=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{1-c}{1+c}\right|^2\frac{2m+1}{2m+2}\\&=\left|\frac{1-c}{1+c}\right|^2<1,\end{aligned}$$

即 $c>0$ 时， (2.26) 式成立．另一方面，当 $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{|a_{2(m+1)}|^2}{|a_{2m}|^2}=1$ 时，即 $c=0$. 此时

$$\begin{aligned}|a_{2m}|^2&=|a_0|^2\frac{|u_1|^2|u_3|^2\cdots|u_{2m-1}|^2}{|u_2|^2|u_4|^2\cdots|u_{2m}|^2}=|a_0|^2\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\\&=|a_0|^2\frac{(2m)!}{((2m)!!)^2}=|a_0|^2\frac{(2m)!}{4^m(m!)^2}.\end{aligned}$$

利用 Strling's 公式

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n/n!\right]=1,$$

可得到 $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{|a_{2m}|^2}{|a_0|^2/\sqrt{\pi m}}=1$, 所以 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|a_{2m}|^2$ 的敛散性与 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|a_0|^2/\sqrt{\pi m}$ 相同, 而 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|a_0|^2/\sqrt{\pi m}$ 发散，所以 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|a_{2m}|^2$ 发散．即 $c=0$ 时对应的 $f\notin F_\alpha^2$.

综合以上三种情形， (2.12) 式中等号成立当且仅当存在实数 $c>0$ 和复数 C, 使得函数 (2.13) 在 F_α^2 的正规正交基下级数展开的系数 $a_n(n\geq 1)$ 表示为 (2.14) 式，并满足 a_n 的规定．定理 2.2 证毕. ▌

注 2.3　在定理 2.2 中，令

$$Te_0=0,\ Te_n=\frac{1}{\alpha}De_n=\sqrt{n/\alpha}e_{n-1},$$

其权序列为 $\{u_n=\sqrt{n/\alpha}\}_{n=1}^{\infty}$, 此时可以得到定理 B. 同时，使得定理 B 中不确定原理等号成立的函数 (2.3) 在 F_α^2 的正规正交基 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ 下的系数正好是 (2.14) 式取特殊 $u_n=\sqrt{n/\alpha}$ 的表达式 ($\alpha=1$ 就得到定理 A).

事实上，在定理 2.2 中，令 $u_n=\sqrt{n/\alpha}$, 则 F_α^2 上的单边加权左移位算子 T 就蜕化为算子 $1/\alpha D$, 同时 F_α^2 上算子 T 的共轭算子 T^* 就蜕化为满足 (2.7) 式的乘法算子．于是定理 B 中的不确定原理表达式 (2.2) 成立.

下面验证使得不确定原理表达式等号成立的函数 (2.3) 在 F_α^2 的正规正交基 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ 下的系数正好对应于 (2.14) 式取特殊 $u_n=\sqrt{n/\alpha}$ 的情形.

由注 2.1(i) 知，我们只需要证明 $a=b=0$ 即可．一方面，此时函数 (2.3) 变为

$$\begin{aligned}
f(z)&=C'\exp\left(\frac{\alpha(c-1)}{2(c+1)}z^2\right)\\
&=C'\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha(c-1)}{2(c+1)}z^2\right)^m}{m!}\right)\\
&=C'\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^m\frac{\alpha^m}{(2m)!!}\sqrt{\frac{(2m)!}{\alpha^{2m}}}\sqrt{\frac{\alpha^{2m}}{(2m)!}}z^{2m}\right)\\
&=C'\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^m\frac{\sqrt{(2m)!}}{(2m)!!}e_{2m}(z)\right)\\
&=C'\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^m\frac{(2m-1)!!}{\sqrt{(2m)!}}e_{2m}(z)\right).
\end{aligned}\tag{2.28}$$

另一方面，当 $a=b=0$ 时 (2.14) 式蜕化成 (2.27) 式．令 (2.27) 式中 $u_n=\sqrt{n/\alpha}$ 得到此时

$$\begin{aligned}
a_{2m}&=c_{2m}\hat{c}^m\prod_{k=1}^{m}|u_{2k-1}|^2\\
&=\frac{1}{(1+c)^{2m}\prod\limits_{i=1}^{2m}\sqrt{\frac{i}{\alpha}}}(c^2-1)^m\prod_{k=1}^{m}\left(\sqrt{\frac{2k-1}{\alpha}}\right)^2\\
&=\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^m\frac{(2m-1)!!}{\sqrt{(2m)!}}.
\end{aligned}\tag{2.29}$$

结合 (2.28) 式和 (2.29) 式，可得函数 (2.3) 在 F_α^2 的正规正交基 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ 下的系数正好是 (2.14) 式取特殊 $u_n=\sqrt{n/\alpha}$ 的表达式．特别地， $\alpha=1$ 就得到定理 A.

参 考 文 献

[1] Bargmann V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. Comm Pure Appl Math, 1961, **14**: 187–214

[2] Hai P V, Khoi L H. Complex symmetry of weighted composition operators on the Fock space. J Math Anal Appl, 2016, **433**: 1757–1771

[3] Le T. Normal and isometric weighted composition operators on the Fock space. Bull Lond Math Soc, 2014, **46**(4): 847–856

[4] Seip K, Youssfi E H. Hankel operators on Fock spaces and related Bergman kernel estimates. J Geom Anal, 2013, **23**: 170–201

[5] Hu Z J, Lv X F. Fock spaces and relative operators (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, **45**(11): 1759–1778

[6] Wang X, Cao G, Zhu K H. BMO and Hankel operators on Fock-type spaces. J Geom Anal, 2015, **25**(3): 1650–1665

[7] Alpay D, Colombo F, Sabadini I, Salomon G. The Fock space in the slice hyperholomorphic setting//Bernstein S, Kahler U, Sabadini I, Sommen F. Hypercomplex Analysis: New Perspectives and Applications Trends in Mathematics, 2014: 43–59

[8] Liang Y X. A left linear weighted composition operator on quaternionic Fock space. Results Math, 2019, **74**, Article number: 23. https://doi.org/10.1007/s00025-018-0948-9

[9] Lian P, Liang Y X. Weighted composition operator on quaternionic Fock space. 2018, arXiv:1803.06778

[10] Zhu K H. Analysis on Fock Spaces. New York: Springer-Verlag, 2012

[11] Weyl H. The Theory of Groups and Quantum Mechanics. New York: Dover Publications, 1950

[12] Chen Y, Zhu K H. Uncertainty principles for the Fock space (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, **45**(11): 1847–1854

[13] Pan W H, Yang C L, Zhao J. Uncertainty principle for the α-Fock space F_α^2 (in Chinese). Pure Mathematics, 2018, **8**(2): 149–163

[14] Folland G B, Sitarm A. The uncertainty principle: A mathematical survey. J Fourier Anal Appl, 1997, **3**: 207–238

Generalized Uncertainty Principle in Fock-Type Spaces

Wu Haigui Liang Yuxia

(*School of Mathematical Sciences, Tianjin Normal University, Tianjin 300387*)

Abstract: The unilateral weighted shift operator is used to construct a general self-adjoint operator pairs in this paper. We obtained the formula of generalized Uncertainty Principle in Fock-type spaces and presented conditions ensuring the equality. This result contains the classical Uncertainty Principle deduced from the derivation and multiplication operators, which can provide some theoretical basis for the solutions to related hot problems in quantum mechanics and other frontal subjects.

Key words: Fock-type space; Uncertainty Principle; Self-adjoint operator; Unilateral weighted shift operator.

MR(2010)Subject Classification: 47B38; 32A37