Mathematica Acta Scientia
数学物理学报

2019,**39A**(4):875–893 http://actams.wipm.ac.cn

非一致格子上的超几何型差分方程：第二类解的 Rodrigues 型表示公式 *

程金发 **　贾鲁昆
(厦门大学数学科学学院　福建厦门 361005)

摘要：通过建立非一致格子上的二阶伴随方程，得到了非一致格子上超几何型差分方程第二类解的 Rodrigues 型表示公式，它们推广了经典 Rodrigues 公式．由此得到由经典 Rodrigues 公式和广义罗德里格斯公式线性组合而成的通解.

关键词：特殊函数；正交多项式；伴随差分方程；超几何型差分方程；非一致格子.

MR(2010) 主题分类：33D45; 33C45　**中图分类号**：O174.6　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2019)04-875-19

1 引言

数学物理的特殊函数，即经典正交多项式和超几何及圆柱函数，是超几何型差分方程的解.

设 $\sigma(x)$ 和 $\tau(x)$ 分别为至多二次和一次多项式，且 λ 为常数．以下二阶微分方程

$$\sigma(x)y''(x)+\tau(x)y'(x)+\lambda y(x)=0, \tag{1.1}$$

称为超几何型微分方程．如果对于正整数 n, 有

$$\lambda=\lambda_n:=-\frac{n(n-1)\sigma''}{2}-n\tau',\ \text{且}\ \lambda_m\neq\lambda_n\ \text{对}\ m=0,1,\cdots,n-1,$$

方程 (1.1) 有一个次数为 n 阶的多项式解 $y_n(x)$, 它用 Rodrigues 公式表示 [1−11]

$$y_n(x)=\frac{1}{\rho(x)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\rho(x)\sigma^n(x)),$$

这里 $\rho(x)$ 满足 Pearson 方程

$$(\sigma(x)\rho(x))'=\tau(x)\rho(x).$$

收稿日期: 2017-03-14; 修订日期: 2018-11-23
E-mail: jfcehng@xmu.edu.cn; lukunjia@163.com
* 基金项目：福建省自然科学基金 (2016J01032)
Supported by the Natural Science Foundation of Fujian Province (2016J01032)
** 通讯作者

这些解在量子力学, 群表示理论和计算数学上是非常有用的. 基于此, 经典超几何型方程理论被著名数学家如 Andrews, Askey[12−13], Wilson, Ismail[14−17]; Nikiforov, Suslov, Uvarov, Atakishiyev[8−10,18−20]; George, Rahman[21]; Koornwinder[22] 等大大向前发展；以及其他许多研究者如 Álvarez-Nodarse, Cardoso, Area, Godoy, Ronveaux, Zarzo, Robin, Dreyfus, Kac, Cheung, Jia, Cheng, Feng 等 [23−32].

如果已知方程 (1.1) 的一个多项式解，就可以用许多方式建立该方程线性独立的解：例如常数变易法 [1], 用 Cauchy 积分表示公式 [4,9]. 然而， Area 等在文献 [23] 中首先给出了方程 (1.1) 第二类型解的推广的 Rodrigues 型表示公式，其表达式是

$$y_n(x)=\frac{C_1}{\rho(x)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\rho(x)\sigma^n(x)\right)+\frac{C_2}{\rho(x)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\rho(x)\sigma^n(x)\int\frac{\mathrm{d}x}{\rho(x)\sigma^{n+1}(x)}\right),$$

这里 C_1,C_2 是任意常数.

最近，受文献 [3] 启发， Robin[24] 给出了更一般的 Rodrigues 公式

$$y_n(x)=\frac{1}{\rho(x)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\rho(x)\sigma^n(x)\left(\int\frac{P_n(x)+D_n}{\rho(x)\sigma^{n+1}(x)}\mathrm{d}x+C_n\right)\right],$$

这里 $P_n(x)$ 是一个任意的 n 阶多项式，且 C_n,D_n 是一个任意常数.

1983 年以来，超几何型微分方程经典理论已经被 Nikiforov, Suslov 和 Uvarov[8−10] 等数学家极大地向前推进，他们是从以下推广开始的．他们用变步长的非一致格子 $\nabla x(s)=x(s)-x(s-1)$ 上的差分方程替换方程 (1.1)

$$\widetilde{\sigma}[x(s)]\frac{\Delta}{\Delta x(s-1/2)}\left[\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right]+\frac{1}{2}\widetilde{\tau}[x(s)]\left[\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)}+\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right]+\lambda y(s)=0,\tag{1.2}$$

这里 $\widetilde{\sigma}(x)$ 和 $\widetilde{\tau}(x)$ 分别是关于 $x(s)$ 的至多二阶和一阶多项式， λ 是一个常数,

$$\Delta y(s)=y(s+1)-y(s),\quad \nabla y(s)=y(s)-y(s-1),$$

$x(s)$ 满足

$$\frac{x(s+1)+x(s)}{2}=\alpha x(s+\frac{1}{2})+\beta\tag{1.3}$$

(这里 α,β 是常数) 且

$$x^2(s+1)+x^2(s)\ \text{是关于}\ x(s+\tfrac{1}{2})\ \text{的至多二阶多项式.}\tag{1.4}$$

在非一致格子上, 通过逼近微分方程 (1.1) 得到的差分方程 (1.2) 具有独立的重要意义, 并且引出其它许多重要的问题. 它的解实质上拓广了原超几何微分方程的解，且其本身有重要独立意义. 它的一些解在量子力学、群论和计算数学中已经被长期使用了. 有关非一致格子上超几何型差分方程 (1.2) 的更多信息, 读者可以查阅相关文献如 Koekoek, Lesky, Swarttouw[7], Nikiforov, Suslov,Uvarov, Atakishiyev, Rahman[8−10,18−20], Magnus[33], Foupouagnigni[34−35], Witte[36].

定义 1.1 两类格子函数 $x(s)$ 被称为非一致格子如果它们满足条件 (1.3) 和 (1.4)

$$x(s)=c_1q^s+c_2q^{-s}+c_3,\tag{1.5}$$

$$x(s)=\widetilde{c}_1s^2+\widetilde{c}_2s+\widetilde{c}_3,\tag{1.6}$$

这里 $c_i, \widetilde{c}_i$ 是任意常数且 $c_1c_2 \neq 0, \widetilde{c}_1\widetilde{c}_2 \neq 0$.

对于方程 (1.2) 中 λ 的某些值，通过 Rodrigues 公式的差分模拟，也有一个关于 $x(s)$ 的多项式解．自然地，人们可以问，在非一致格子差分方程中是否有 Rodrigues 公式的推广．据我们所知，在一致格子如 $x(s)=s$ 和 $x(s)=q^s$ 的情形，文献 [28] 已经做出有效的推广．然而，在非一致格子 (1.5) 或 (1.6) 的情况下，这将是十分复杂和困难的，因此在这种情况下，包括文献 [28] 在内，自 2005 年以来没有出现过任何该方面的相关进展和结果．

本文的目的，将在非一致格子 (1.5) 和 (1.6) 情形下，给出 Rodrigues 公式的两个推广．本论安排组织如下．第 2 节中介绍了非一致格子上的差分与和分基本概念、性质．在第 3 节和第 4 节，回顾非一致格子上的经典 Rodrigues 公式，并给出了一些必需的记号和一些引理．第 5 节，我们在非一致格子上，建立并化简一个二阶超几何超几何差分方程的伴随差分方程，这个新结果也有独立的重要意义．利用伴随差分方程，第 6 节，我们在定理 6.2 中给出了罗德里格斯公式的一种拓展．在第 7 节中，用不同于第 6 节的方法，建立另一个更一般的罗德里格斯公式定理 7.1.

2 非一致格子上的差分及和分

设 $x(s)$ 是一个格子，这里 $s\in\mathbb{C}$. 对任何整数 k, $x_k(s)=x(s+\frac{k}{2})$ 也是一个格子．给定函数 $f(s)$, 定义关于 $x_k(s)$ 的两种差分算子如下

$$\Delta_k f(s)=\frac{\Delta f(s)}{\Delta x_k(s)},\qquad \nabla_k f(s)=\frac{\nabla f(s)}{\nabla x_k(s)}. \tag{2.1}$$

进一步，对任何非负整数 n, 让

$$\Delta_k^{(n)} f(s)=\begin{cases} f(s), & n=0,\\ \dfrac{\Delta}{\Delta x_{k+n-1}(s)}\cdots\dfrac{\Delta}{\Delta x_{k+1}(s)}\dfrac{\Delta}{\Delta x_k(s)}f(s), & n\geq 1.\end{cases}$$

$$\nabla_k^{(n)} f(s)=\begin{cases} f(s), & n=0,\\ \dfrac{\nabla}{\nabla x_{k-n+1}}\cdots\dfrac{\nabla}{\nabla x_{k-1}(s)}\dfrac{\nabla}{\nabla x_k(s)}f(s), & n\geq 1.\end{cases}$$

下面这些性质容易验证.

命题 2.1 给定具有复变量 s 的两个函数 $f(s), g(s)$，则有

$$\Delta_k(f(s)g(s))=f(s+1)\Delta_k g(s)+g(s)\Delta_k f(s)=g(s+1)\Delta_k f(s)+f(s)\Delta_k g(s),$$

$$\Delta_k\left(\frac{f(s)}{g(s)}\right)=\frac{g(s+1)\Delta_k f(s)-f(s+1)\Delta_k g(s)}{g(s)g(s+1)}=\frac{g(s)\Delta_k f(s)-f(s)\Delta_k g(s)}{g(s)g(s+1)},$$

$$\nabla_k(f(s)g(s))=f(s-1)\nabla_k g(s)+g(s)\nabla_k f(s)=g(s-1)\nabla_k f(s)+f(s)\nabla_k g(s),$$

$$\nabla_k\left(\frac{f(s)}{g(s)}\right)=\frac{g(s-1)\nabla_k f(s)-f(s-1)\nabla_k g(s)}{g(s)g(s-1)}=\frac{g(s)\nabla_k f(s)-f(s)\nabla_k g(s)}{g(s)g(s-1)}.$$

为了处理逆算子 ∇_k, 它是一种和分，延续 Bangerezako 在文献 [29] 的记号，令 $\nabla_k f(t)=g(t)$. 那么

$$f(t)-f(t-1)=g(t)\left[x_k(t)-x_k(t-1)\right].$$

选取 $N, s \in \mathbb{C}$. 从 $t=N$ 到 $t=s$ 相加，有

$$f(s)-f(N-1)=\sum_{t=N}^{t=s} g(t)\nabla x_k(t).$$

因此，我们定义

$$\int_N^s g(t)\mathrm{d}_\nabla x_k(t)=\sum_{t=N}^{t=s} g(t)\nabla x_k(t). \tag{2.2}$$

容易验证

命题 2.2 给定具有复变量 N, s 的两个函数 $f(s), g(s)$, 则有

$$(1) \qquad \nabla_k\left[\int_N^s g(t)\mathrm{d}_\nabla x_k(t)\right]=g(s),$$

$$(2) \qquad \int_N^s \nabla_k f(t)\mathrm{d}_\nabla x_k(t)=f(s)-f(N).$$

3 Rodrigues 公式

运用第二节中的记号，超几何型 (1.2) 的差分方程可以写成

$$\widetilde{\sigma}[x(s)]\Delta_{-1}\nabla_0 y(s)+\frac{\widetilde{\tau}[x(s)]}{2}\left[\Delta_0 y(s)+\nabla_0 y(s)\right]+\lambda y(s)=0. \tag{3.1}$$

在下文中，我们假设格子 $x(s)$ 有 (1.5) 式和 (1.6) 式两种形式.

让

$$z_k(s)=\Delta_0^{(k)} y(s)=\Delta_{k-1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_0 y(s).$$

那么对非负整数 k, $z_k(s)$ 满足与方程 (3.1) 同型的方程 [10]

$$\widetilde{\sigma}_k[x_k(s)]\Delta_{k-1}\nabla_k z_k(s)+\frac{\widetilde{\tau}_k[x_k(s)]}{2}\left[\Delta_k z_k(s)+\nabla_k z_k(s)\right]+\mu_k z_k(s)=0, \tag{3.2}$$

这里 $\widetilde{\sigma}_k(x_k)$ 和 $\widetilde{\tau}_k(x_k)$ 分别是关于 x_k 的至多二阶和一阶多项式， μ_k 是一常数，且

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sigma}_k[x_k(s)]=&\frac{\widetilde{\sigma}_{k-1}[x_{k-1}(s+1)]+\widetilde{\sigma}_{k-1}[x_{k-1}(s)]}{2}\\
&+\frac{1}{4}\Delta_{k-1}\widetilde{\tau}_{k-1}(s)\frac{\Delta x_k(s)+\nabla x_k(s)}{2\Delta x_{k-1}(s)}[\Delta x_{k-1}(s)]^2\\
&+\frac{\widetilde{\tau}_{k-1}[x_{k-1}(s+1)]+\widetilde{\tau}_{k-1}[x_{k-1}(s)]}{2}\frac{\Delta x_k(s)-\nabla x_k(s)}{4},\\
\widetilde{\sigma}_0[x_0(s)]=&\widetilde{\sigma}[x(s)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tau}_k[x_k(s)]=&\Delta_{k-1}\widetilde{\sigma}_{k-1}\left[x_{k-1}(s)\right]+\Delta_{k-1}\widetilde{\tau}_{k-1}\left[x_{k-1}(s)\right]\frac{\Delta x_k(s)-\nabla x_k(s)}{4}\\
&+\frac{\widetilde{\tau}_{k-1}[x_{k-1}(s+1)]+\widetilde{\tau}_{k-1}[x_{k-1}(s)]}{2}\frac{\Delta x_k(s)+\nabla x_k(s)}{2\Delta x_{k-1}(s)},\\
\widetilde{\tau}_0[x_0(s)]=&\widetilde{\tau}[x(s)];
\end{aligned}$$

$$\mu_k=\mu_{k-1}+\Delta_{k-1}\widetilde{\tau}_{k-1}\left[x_{k-1}(s)\right],\ \mu_0=\lambda.$$

为了研究方程 (3.2) 解的更多性质，下面的方程是有用的

$$\frac{1}{2}\left[\Delta_k z_k(s)+\nabla_k z_k(s)\right]=\Delta_k z_k(s)-\frac{1}{2}\Delta\left[\nabla_k z_k(s)\right].$$

将方程 (3.2) 改写为等价形式

$$\sigma_k(s)\Delta_{k-1}\nabla_k z_k(s)+\tau_k(s)\Delta_k z_k(s)+\mu_k z_k(s)=0, \tag{3.3}$$

这里

$$\sigma_k(s)=\widetilde{\sigma}_k[x_k(s)]-\frac{1}{2}\widetilde{\tau}_k[x_k(s)]\nabla x_{k+1}(s), \tag{3.4}$$
$$\tau_k(s)=\widetilde{\tau}_k[x_k(s)]. \tag{3.5}$$

我们发现

$$\tau_k(s)=\frac{\sigma(s+k)-\sigma(s)+\tau(s+k)\nabla x_1(s+k)}{\nabla x_{k+1}(s)}, \tag{3.6}$$
$$\mu_k=\lambda+\sum_{j=0}^{k-1}\Delta_j\tau_j(s). \tag{3.7}$$

注 3.1 当 k 是一负整数时，我们也记等式 (3.6) 右边为 τ_k.

将方程 (3.3) 改写成自相伴形式

$$\Delta_{k-1}\left[\sigma_k(s)\rho_k(s)\nabla_k z_k(s)\right]+\mu_k\rho_k(s)z_k(s)=0,$$

这里 $\rho_k(s)$ 满足 Pearson 型差分方程

$$\Delta_{k-1}\left[\sigma_k(s)\rho_k(s)\right]=\tau_k(s)\rho_k(s).$$

让 $\rho(s)=\rho_0(s)$, 我们发现

$$\rho_k(s)=\rho(s+k)\prod_{i=1}^{k}\sigma(s+i).$$

如果对正整数 n, 有

$$\lambda=\lambda_n:=-\sum_{j=0}^{n-1}\Delta_j\tau_j(s),\ \text{且}\ \lambda_m\neq\lambda_n\ \text{对}\ m=0,1,\cdots,n-1, \tag{3.8}$$

那么方程 (3.1) 有一个关于 $x(s)$ 的 n 阶多项式解 $y_n[x(s)]$, 它可以表示成 Rodriguez 型公式的差分模拟 [8−10]

$$y_n[x(s)]=\frac{1}{\rho(s)}\nabla_n^{(n)}\left[\rho_n(s)\right]=\frac{1}{\rho(s)}\Delta_{-n}^{(n)}\left[\rho_n(s-n)\right].$$

4 $\tau_k(s),\mu_k$ 和 λ_n 的显示表示

现在，我们在非一致格子 (1.5) 和 (1.6) 下，分别给出 $\tau_k(s),\mu_k$ 和 λ_n 的显示表达式.

命题 4.1 给定任意整数 k, 如果 $x(s)=c_1q^s+c_2q^{-s}+c_3$, 那么

$$\begin{aligned}\tau_k(s)&=\left[\frac{q^k-q^{-k}}{q^{\frac12}-q^{-\frac12}}\frac{\widetilde{\sigma}''}{2}+\left(q^k+q^{-k}\right)\frac{\widetilde{\tau}'}{2}\right]x_k(s)+c(k)\\&=[\nu(2k)\frac{\widetilde{\sigma}''}{2}+\alpha(2k)\widetilde{\tau}']x_k(s)+c(k)=\kappa_{2k+1}x_k(s)+c(k),\end{aligned}$$

这里

$$\nu(\mu)=\begin{cases}\dfrac{q^{\frac{\mu}{2}}-q^{-\frac{\mu}{2}}}{q^{\frac12}-q^{-\frac12}}\\ \mu\end{cases},\qquad \alpha(\mu)=\begin{cases}\dfrac{q^{\frac{\mu}{2}}+q^{-\frac{\mu}{2}}}{2}\\ 1\end{cases},$$

且

$$\kappa_\mu=\alpha(\mu-1)\widetilde{\tau}'+\nu(\mu-1)\frac{\widetilde{\sigma}''}{2}.$$

如果 $x(s)=\widetilde{c}_1s^2+\widetilde{c}_2s+\widetilde{c}_3$, 那么

$$\tau_k(s)=[k\widetilde{\sigma}''+\widetilde{\tau}']\,x_k(s)+\widetilde{c}(k)=\kappa_{2k+1}x_k(s)+\widetilde{c}(k),$$

这里 $c(k),\widetilde{c}(k)$ 是关于 k 的函数

$$\begin{aligned}c(k)=&\,c_3(1-q^{\frac{k}{2}})(q^{\frac{k}{2}}-q^{-k})+c_3\frac{(2-q^{\frac{k}{2}}-q^{-\frac{k}{2}})(q^{\frac{k}{2}}-q^{-\frac{k}{2}})}{q^{\frac12}-q^{-\frac12}}\\&+\widetilde{\tau}(0)(q^{\frac{k}{2}}+q^{-\frac{k}{2}})+\widetilde{\sigma}(0)\frac{q^{\frac{k}{2}}-q^{-\frac{k}{2}}}{q^{\frac12}-q^{-\frac12}},\end{aligned}$$

$$\widetilde{c}(k)=\frac{\widetilde{\sigma}''}{4}\widetilde{c}_1k^3+\frac{3\widetilde{\tau}'}{4}\widetilde{c}_1k^2+\widetilde{\sigma}(0)k+2\widetilde{\tau}(0).$$

证 我们仅仅证明 $x(s)=c_1q^s+c_2q^{-s}+c_3$ 的情形. 由 (3.4), (3.5) 和 (3.6) 式，我们有

$$\tau_k(s)=\frac{\widetilde{\sigma}[x(s+k)]-\widetilde{\sigma}[x(s)]+\frac12\widetilde{\tau}[x(s+k)]\Delta x(s+k-\frac12)+\frac12\widetilde{\tau}[x(s)]\Delta x(s-\frac12)}{\Delta x_{k-1}(s)}.\tag{4.1}$$

一些简单的计算后，我们得到

$$x(s+k)-x(s)=(q^{\frac{k}{2}}-q^{-\frac{k}{2}})(c_1q^{s+\frac{k}{2}}-c_2q^{-s-\frac{k}{2}}),$$

$$x(s+k)+x(s)=(q^{\frac{k}{2}}+q^{-\frac{k}{2}})x_k(s)+c_3(2-q^{\frac{k}{2}}-q^{-\frac{k}{2}}),$$

$$\Delta x_{k-1}(s)=(q^{\frac12}-q^{-\frac12})(c_1q^{s+\frac{k}{2}}-c_2q^{-s-\frac{k}{2}}).$$

进一步， $\widetilde{\sigma}[x(s)]=\frac{\widetilde{\sigma}''}{2}x^2(s)+\widetilde{\sigma}'(0)x(s)+\widetilde{\sigma}(0)$. 那么

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\sigma}[x(s+k)]-\widetilde{\sigma}[x(s)]}{\Delta x_{k-1}(s)}&=\frac{\widetilde{\sigma}''}{2}\frac{x^2(s+k)-x^2(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}+\widetilde{\sigma}'(0)\frac{x(s+k)-x(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}\\&=\frac{\widetilde{\sigma}''}{2}\frac{q^k-q^{-k}}{q^{\frac12}-q^{-\frac12}}x_k(s)+\widetilde{\sigma}'(0)\frac{q^{\frac{k}{2}}-q^{-\frac{k}{2}}}{q^{\frac12}-q^{-\frac12}}\\&\quad+c_3\frac{(2-q^{\frac{k}{2}}-q^{-\frac{k}{2}})(q^{\frac{k}{2}}-q^{-\frac{k}{2}})}{q^{\frac{k}{2}}-q^{-\frac{k}{2}}}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

进一步，有

$$\begin{aligned}&x(s+k)\Delta x(s+k-\frac{1}{2})+x(s)\Delta x(s-\frac{1}{2})\\=&(q^k+q^{-k})(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})(c_1q^{s+\frac{k}{2}}-c_2q^{-s-\frac{k}{2}})x_k(s)\\&+c_3(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})(c_1q^{s+\frac{k}{2}}-c_2q^{-s-\frac{k}{2}})(1-q^{\frac{k}{2}})(q^{\frac{k}{2}}-q^{-k}),\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$\Delta x(s+k-\frac{1}{2})+\Delta x(s-\frac{1}{2})=(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})(q^{\frac{k}{2}}+q^{-\frac{k}{2}})(c_1q^{s+\frac{k}{2}}-c_2q^{-s-\frac{k}{2}}),\tag{4.4}$$

且 $\tau[x(s)]=\widetilde{\tau}'x(s)+\widetilde{\tau}(0)$. 因此

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\widetilde{\tau}[x(s+k)]\Delta x(s+k-\frac{1}{2})+\widetilde{\tau}[x(s)]\Delta x(s-\frac{1}{2})}{\Delta x_{k-1}(s)}\\=&\frac{\widetilde{\tau}'}{2}\frac{x(s+k)\Delta x(s+k-\frac{1}{2})+x(s)\Delta x(s-\frac{1}{2})}{\Delta x_{k-1}(s)}+\frac{\widetilde{\tau}(0)}{2}\frac{\Delta x(s+k-\frac{1}{2})+\Delta x(s-\frac{1}{2})}{\Delta x_{k-1}(s)}\\=&\frac{\widetilde{\tau}'}{2}(q^k+q^{-k})x_k(s)+c_3(1-q^{\frac{k}{2}})(q^{\frac{k}{2}}-q^{-k})+\widetilde{\tau}(0)(q^{\frac{k}{2}}+q^{-\frac{k}{2}}).\end{aligned}\tag{4.5}$$

将 (4.2) 和 (4.5) 式代入 (3.5) 式，就可得结论. ∎

引理 4.1[18] 对 $\alpha(\mu),\nu(\mu)$, 我们有

$$\sum_{j=0}^{k-1}\alpha(2j)=\alpha(k-1)\nu(k),\qquad\sum_{j=0}^{k-1}\nu(2j)=\nu(k-1)\nu(k).$$

从 (3.7) 式， (3.8) 式和引理 4.1, 我们有

命题 4.2 若 $x(s)=c_1q^s+c_2q^{-s}+c_3$ 或 $x(s)=\widetilde{c}_1s^2+\widetilde{c}_2s+\widetilde{c}_3$, 那么

$$\mu_k=\lambda+\kappa_k\nu(k),\tag{4.6}$$

这里 $\kappa_k=\alpha(k-1)\tilde{\tau}'+\frac{1}{2}\nu(k-1)\tilde{\sigma}''$.

证 如果 $x(s)=c_1q^s+c_2q^{-s}+c_3$, 那么

$$\begin{aligned}\mu_k&=\lambda+\sum_{j=0}^{k-1}\left[\frac{q^j-q^{-j}}{q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}}\frac{\widetilde{\sigma}''}{2}-(q^j+q^{-j})\frac{\widetilde{\tau}'}{2}\right]\\&=\lambda+\sum_{j=0}^{k-1}\nu(2j)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}+\sum_{j=0}^{k-1}\alpha(2j)\tilde{\tau}'\\&=\lambda+\nu(k-1)\nu(k)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}+\alpha(k-1)\nu(k)\tilde{\tau}'\\&=\lambda+\kappa_k\nu(k),\end{aligned}$$

这里

$$\kappa_k=\alpha(k-1)\tilde{\tau}'+\frac{1}{2}\nu(k-1)\tilde{\sigma}''.\tag{4.7}$$

如果 $x(s)=\widetilde{c}_1s^2+\widetilde{c}_2s+\widetilde{c}_3$, 那么

$$\mu_k=\lambda+\sum_{j=0}^{k-1}[j\tilde{\sigma}''+\tilde{\tau}']=\lambda+\frac{(k-1)k}{2}\tilde{\sigma}''+k\tilde{\tau}'=\lambda+\kappa_k\nu(k).$$

证毕. ∎

由命题 4.2 和 (3.8) 式，我们有

$$\lambda_n=-n\kappa_n.\tag{4.8}$$

5 非一致格子上超几何差分方程的伴随方程

让

$$L[y]=\sigma(s)\Delta_{-1}\nabla_0 y(s)+\tau(s)\Delta_0 y(s)+\lambda y(s)=0. \tag{5.1}$$

那么方程 (5.1) 有自相伴形式

$$\Delta_{-1}\left[\sigma(s)\rho(s)\nabla_0 y(s)\right]+\lambda\rho(s)y(s)=0, \tag{5.2}$$

这里 $\rho(s)$ 满足 Pearson 型方程

$$\Delta_{-1}\left[\sigma(s)\rho(s)\right]=\tau(s)\rho(s). \tag{5.3}$$

为了得到非一致格子上 Rodriguez 型公式的推广，如何定义和建立非一致格子上超几何差分方程的伴随方程至关重要.

让 $w(s)=\rho(s)y(s)$. 那么

$$\nabla_0 y(s)=\nabla_0\frac{w(s)}{\rho(s)}=\frac{\rho(s-1)\nabla_0 w(s)-w(s-1)\nabla_0\rho(s)}{\rho(s)\rho(s-1)}. \tag{5.4}$$

将 (5.4) 式代入 (5.2) 式，我们得

$$\Delta_{-1}\left[\sigma(s)(\nabla_0 w(s)-w(s-1)\frac{\nabla_0\rho(s)}{\rho(s-1)})\right]+\lambda w(s)=0. \tag{5.5}$$

由 Pearson 型方程 (5.3), 有

$$\frac{\Delta[\sigma(s)\rho(s)]}{\Delta x_{-1}(s)}=\frac{\sigma(s+1)\Delta\rho(s)+\Delta\sigma(s)\rho(s)}{\Delta x_{-1}(s)}=\tau(s)\rho(s).$$

那么

$$\frac{\nabla\rho(s)}{\rho(s-1)}=\frac{\tau(s-1)\nabla_{-1}(s)-\nabla\sigma(s)}{\sigma(s)}. \tag{5.6}$$

将 (5.6) 式代入 (5.5) 式，可得

$$L^*[w]:=\sigma^*(s)\Delta_{-1}\nabla_0 w(s)+\tau^*(s)\Delta_0 w(s)+\lambda^* w(s)=0, \tag{5.7}$$

这里

$$\sigma^*(s)=\sigma(s-1)+\tau(s-1)\nabla x_{-1}(s), \tag{5.8}$$

$$\tau^*(s)=\frac{\sigma(s+1)-\sigma(s-1)}{\Delta x_{-1}(s)}-\tau(s-1)\frac{\nabla x_{-1}(s)}{\Delta x_{-1}(s)}, \tag{5.9}$$

$$\lambda^*=\lambda-\Delta_{-1}\left(\tau(s-1)\frac{\nabla x_{-1}(s)}{\nabla x(s)}-\frac{\nabla\sigma(s)}{\nabla x(s)}\right). \tag{5.10}$$

定义 5.1 方程 (5.7) 被称为对应于方程 (5.1) 的相伴方程.

由定义 5.1, 容易得到

命题 5.1 对 $y(s)$, 我们有

$$L^*[\rho y]=\rho L[y]. \tag{5.11}$$

引理 5.1[18]　让 $x=x(s)$ 是一个满足 (1.5) 和 (1.6) 式的非一致格子，那么由下面等式所定义的函数 $\tilde{\sigma}_\nu(s)$ 和 $\tau_\nu(s)$

$$\tilde{\sigma}_\nu(s)=\sigma(s)+\frac{1}{2}\tau_\nu(s)\nabla x_{\nu+1}(s), \tag{5.12}$$

$$\tau_\nu(s)\nabla x_{\nu+1}(s)=\sigma(s+\nu)-\sigma(s)+\tau(s+\nu)\nabla x_1(s+\nu), \tag{5.13}$$

分别是关于变量 $x_\nu=x(s+\frac{\nu}{2}),\nu\in\mathbb{R}$ 的至多二阶或一阶多项式.

利用命题 4.1 和引理 5.1, 不难得到

推论 5.1　对 (5.9) 和 (5.10) 式，我们有

$$\tau^*(s)=-\tau_{-2}(s+1)=[\gamma(4)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}-\alpha(4)\tilde{\tau}']x_0(s)+c(-2), \tag{5.14}$$

且

$$\lambda^*=\lambda-\Delta_{-1}\tau_{-1}(s)=\lambda-\gamma(2)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}-\alpha(2)\tilde{\tau}'=\lambda-\kappa_{-1}. \tag{5.15}$$

证　由于

$$\sigma(s-1)-\sigma(s+1)+\tau(s-1)\nabla x_{-1}(s)=\sigma(s-1)-\sigma(s+1)+\tau(s-1)\nabla x_1(s-1).$$

置 $s+1=z$, 则由 (5.13) 式，我们有

$$\begin{aligned}&\sigma(s-1)-\sigma(s+1)+\tau(s-1)\nabla x_1(s-1)\\&=\sigma(z-2)-\sigma(z)+\tau(z-2)\nabla x_1(z-2)\\&=\tau_{-2}(z)\nabla x_{-1}(z)=\tau_{-2}(s+1)\nabla x_{-1}(s+1)\\&=\tau_{-2}(s+1)\Delta x_{-1}(s),\end{aligned}$$

现在由 (5.9) 式和命题 4.1, 可得

$$\begin{aligned}\tau^*(s)&=-\tau_{-2}(s+1)=-[\gamma(-4)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}+\alpha(-4)\tilde{\tau}']x_{-2}(s+1)+c(-2)\\&=[\gamma(4)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}-\alpha(4)\tilde{\tau}']x_0(s)+c(-2).\end{aligned}$$

同理，从 (5.10) 和 (5.13) 式，我们得到

$$\begin{aligned}\lambda^*&=\lambda-\Delta_{-1}\tau_{-1}(s)=\lambda-\Delta_{-1}\{[\gamma(-2)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}+\alpha(-2)\tilde{\tau}]x_{-1}(s)\}\\&=\lambda+\gamma(2)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}-\alpha(2)\tilde{\tau}'=\lambda-\kappa_{-1}.\end{aligned}$$

证毕. ∎

关于伴随方程 (5.7), 我们发现它具有下面有趣的对偶性质.

命题 5.2　对于伴随方程 (5.7), 我们有

$$\sigma(s)=\sigma^*(s-1)+\tau^*(s-1)\nabla x_{-1}(s), \tag{5.16}$$

$$\tau(s)=\frac{\sigma^*(s+1)-\sigma^*(s-1)}{\Delta x_{-1}(s)}-\tau^*(s-1)\frac{\nabla x_{-1}(s)}{\Delta x_{-1}(s)}, \tag{5.17}$$

$$\lambda=\lambda^*-\Delta_{-1}\left(\tau^*(s-1)\frac{\nabla x_{-1}(s)}{\nabla x(s)}-\frac{\nabla\sigma^*(s)}{\nabla x(s)}\right). \tag{5.18}$$

证 从 (5.9) 式我们有

$$\tau^*(s)\Delta x_{-1}(s)=\sigma(s+1)-\sigma(s-1)-\tau(s-1)\nabla x_{-1}(s), \tag{5.19}$$

从 (5.8) 和 (5.19) 式，我们有

$$\sigma(s+1)=\sigma^*(s)+\tau^*(s)\Delta x_{-1}(s),$$

因此

$$\sigma(s)=\sigma^*(s-1)+\tau^*(s-1)\nabla x_{-1}(s).$$

由 (5.8) 式，我们得

$$\tau(s-1)=\frac{\sigma^*(s)-\sigma(s-1)}{\nabla x_{-1}(s)}=\frac{\sigma^*(s)-\sigma^*(s-2)-\tau^*(s-2)\nabla x_{-1}(s-1)}{\nabla x_{-1}(s)},$$

因此

$$\tau(s)=\frac{\sigma^*(s+1)-\sigma^*(\mathrm{s}-1)-\tau^*(\mathrm{s}-1)\nabla \mathrm{x}_{-1}(\mathrm{s})}{\Delta x_{-1}(s)}.$$

进一步

$$\begin{aligned}\tau(s-1)\nabla x_{-1}(s)-\nabla\sigma(s)&=\sigma^*(s)-\sigma(s-1)-\nabla\sigma(s)\\&=\sigma^*(s)-\sigma(s)\\&=\sigma^*(s)-[\sigma^*(s-1)+\tau^*(s-1)\nabla x_{-1}(s)]\\&=\nabla\sigma^*(s)-\tau^*(s-1)\nabla x_{-1}(s),\end{aligned} \tag{5.20}$$

因此，由 (5.10) 和 (5.20) 式，可得

$$\lambda=\lambda^*+\Delta_{-1}\left[\frac{\tau(s-1)\nabla x_{-1}(s)-\nabla\sigma(s)}{\nabla x(s)}\right]=\lambda^*-\Delta_{-1}\left[\frac{\tau^*(s-1)\nabla x_{-1}(s)-\nabla\sigma^*(s)}{\nabla x(s)}\right].$$

证毕. ∎

用与推论 5.1 相同的方法，我们得到

推论 5.2 对方程 (5.17) 和 (5.18), 我们有

$$\tau(s)=-\tau^*_{-2}(s+1), \tag{5.21}$$

且

$$\lambda=\lambda^*-\kappa^*_{-1}. \tag{5.22}$$

命题 5.3 伴随方程 (5.7) 可以改写为

$$\sigma(s+1)\Delta_{-1}\nabla_0 w(s)-\tau_{-2}(s+1)\nabla_0 w(s)+(\lambda-\kappa_{-1})w(s)=0. \tag{5.23}$$

证 由于

$$\Delta_0 w(s)-\nabla_0 w(s)=\Delta(\frac{\nabla w(s)}{\nabla x(s)}),$$

我们有

$$\tau^*(s)\Delta_0 w(s)=\tau^*(s)\nabla_0 w(s)+\tau^*(s)\Delta(\frac{\nabla w(s)}{\nabla x(s)})$$
$$=\tau^*(s)\nabla_0 w(s)+\tau^*(s)\Delta x_{-1}(s)\frac{\Delta}{\Delta x_{-1}(s)}(\frac{\nabla w(s)}{\nabla x(s)}), \tag{5.24}$$

将 (5.24) 式代入 (5.7) 式，我们有

$$[\sigma^*(s)+\tau^*(s)\Delta x_{-1}(s)]\frac{\Delta}{\Delta x_{-1}(s)}(\frac{\nabla w(s)}{\nabla x(s)})+\tau^*(s)\nabla_0 w(s)+\lambda^* w(s)=0. \tag{5.25}$$

由 (5.16) 式，可得

$$\sigma^*(s)+\tau^*(s)\Delta x_{-1}(s)=\sigma(s+1). \tag{5.26}$$

将 (5.26) 式代入 (5.25) 式，且由 (5.14) 式，我们得

$$\sigma(s+1)\Delta_{-1}\nabla_0 w(s)-\tau_{-2}(s+1)\nabla_0 w(s)+(\lambda-\kappa_{-1})w(s)=0.$$

证毕. ∎

接下来我们要证明伴随方程 (5.7) 或 (5.23) 也是非一致格子上的超几何型差分方程. 这仅需证明

$$\tilde{\sigma}^*(s)=\sigma^*(s)+\frac{1}{2}\tau^*(s)\Delta x_{-1}(s)=\sigma(s+1)+\frac{1}{2}\tau_{-2}(s+1)\Delta x_{-1}(s)$$

是关于变量 $x_0(s)$ 的至多二阶多项式.

事实上，由引理 5.1 和 (5.12) 式，可得

$$\tilde{\sigma}^*(s)=\sigma(s+1)+\frac{1}{2}\tau_{-2}(s+1)\nabla x_{-1}(s+1)=\tilde{\sigma}_{-2}(s+1)$$

是关于变量 $x_{-2}(s+1)=x_0(s)$ 的至多二阶多项式.

因此，我们得到

定理 5.1 伴随方程 (5.23) 或

$$\tilde{\sigma}_{-2}(s+1)\Delta_{-1}\nabla_0 w(s)-\frac{1}{2}\tau_{-2}(s+1)[\Delta_0 w(s)+\nabla_0 w(s)]+(\lambda-\kappa_{-1})w(s)=0 \tag{5.27}$$

也是非一致格子上的超几何型差分方程.

6 Rodrigues 公式的一个推广

让

$$Y_n(s)=\rho_n(s-n)=\rho(s)\prod_{j=0}^{n-1}\sigma(s-i).$$

现在构造一个形如 (3.3) 式的差分方程，它有解 $Y_n(s)$. 改写为 $Y_n(s)=\rho(s)\sigma(s)\prod\limits_{j=1}^{n-1}\sigma(s-i)$. 那么利用命题 2.1 和 Pearson 方程 (5.3), 我们有

$$\nabla_{-n}Y_n(s)=\frac{\nabla Y_n(s)}{\nabla x_{-n}(s)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\nabla x_{-n}(s)}\left[\rho(s)\sigma(s)\prod_{j=1}^{n-1}\sigma(s-i)-\rho(s-1)\sigma(s-1)\prod_{i=1}^{n-1}\sigma(s-1-i)\right] \\
&= \frac{1}{\nabla x_{-n}(s)}\Bigg\{[\tau(s-1)\rho(s-1)\nabla x_{-1}(s)+\sigma(s-1)\rho(s-1)]\prod_{i=1}^{n-1}\sigma(s-i) \\
&\quad -\rho(s-1)\sigma(s-1)\prod_{i=1}^{n-1}\sigma(s-1-i)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

那么我们得到一个解 $Y_n(s)$ 的差分方程

$$
\sigma(s-n)\nabla_{-n}Y_n(s)=\left(\frac{\sigma(s-1)-\sigma(s-n)}{\nabla x_{-n}(s)}+\tau(s-1)\frac{\nabla x_{-1}(s)}{\nabla x_{-n}(s)}\right)Y_n(s-1). \tag{6.1}
$$

命题 6.1 如果 $u_1(s)$ 是以下差分方程的一个非平凡解

$$
p_1(s)\nabla_k u(s)=p_0(s)u(s-1), \tag{6.2}
$$

这里 $p_1(s)\neq 0$, 那么它满足差分方程

$$
\begin{aligned}
&(p_1(s)-p_0(s)\nabla x_k(s))\,\Delta_{k-1}\nabla_k u(s) \\
&+\left(\Delta_{k-1}p_1(s)-p_0(s)\frac{\nabla x_k(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}\right)\Delta_k u(s)-\Delta_{k-1}p_0(s)u(s)=0.
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

进一步，差分方程 (6.3) 的其它解是

$$
u_2(s)=Cu_1(s)\int_N^s\frac{1}{p_1(t)u_1(t)}d_\nabla x_k(t),
$$

这里 C 是常数.

证 将算子 Δ_{k-1} 作用到方程 (6.2) 两边，我们有

$$
p_1(s)\Delta_{k-1}\nabla_k u(s)+\Delta_{k-1}p_1(s)\Delta_k u(s)=u(s)\Delta_{k-1}p_0(s)+p_0(s)\Delta_{k-1}u(s-1). \tag{6.4}
$$

由于

$$
\Delta_{k-1}\nabla_k u(s)=\frac{1}{\Delta x_{k-1}(s)}\left(\Delta_k u(s)-\frac{\nabla u(s)}{\nabla x_k(s)}\right),
$$

则有

$$
\Delta_{k-1}u(s-1)=\frac{\nabla x_k(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}\left(\Delta_k u(s)-\Delta_{k-1}\nabla_k u(s)\Delta x_{k-1}(s)\right). \tag{6.5}
$$

将 (6.5) 式代入 (6.4) 式，我们得到关于 $u(s)$ 的方程 (6.3)．记方程 (6.3) 其它另一解为 $u_2(s)$, 那么

$$
\nabla_k\left(\frac{u_2(s)}{u_1(s)}\right)=\frac{u_1(s-1)\nabla_k u_2(s)-u_2(s-1)\nabla_k u_1(s)}{u_1(s)u_1(s-1)}. \tag{6.6}
$$

由以上推导， $u_2(s)$ 满足

$$
\Delta_{k-1}[p_1(s)\nabla_k u(s)-p_0(s)u(s-1)]=0.
$$

因此对任意常数 C, 有

$$p_1(s)\nabla_k u_2(s)-p_0(s)u_2(s-1)=C.$$

那么，将 (6.2) 式代入 (6.6) 式，可得

$$\nabla_k\left(\frac{u_2(s)}{u_1(s)}\right)=\frac{C}{p_1(s)u_1(s)}.$$

由命题 2.2, 有

$$u_2(s)=Cu_1(s)\int_N^s\frac{1}{p_1(t)u_1(t)}\mathrm{d}_\nabla x_k(t).$$

证毕. ∎

由上面命题，可得

$$\widehat{\sigma}(s)\Delta_{-(n+1)}\nabla_{-n}Y_n(s)+\widehat{\tau}(s)\Delta_{-n}Y_n(s)+\widehat{\lambda}Y_n(s)=0,\tag{6.7}$$

这里

$$\widehat{\sigma}(s)=\sigma(s-1)+\tau(s-1)\nabla x_{-1}(s)=\sigma^*(s),\tag{6.8}$$

$$\widehat{\tau}(s)=\frac{\sigma(s-n+1)-\sigma(s-1)}{\Delta x_{-(n+1)}(s)}-\tau(s-1)\frac{\nabla x_{-1}(s)}{\Delta x_{-(n+1)}(s)}=-\tau_{-(n+2)}(s+1),\tag{6.9}$$

$$\widehat{\lambda}=-\Delta_{-(n+1)}\left(\frac{\sigma(s-1)-\sigma(s-n)}{\nabla x_{-n}(s)}+\tau(s-1)\frac{\nabla x_{-1}(s)}{\nabla x_{-n}(s)}\right)=-\Delta_{-(n+1)}\tau_{-(n+1)}(s).\tag{6.10}$$

由与第五节类似的方法，方程 (6.7) 可被改写成

$$\sigma(s+1)\Delta_{-(n+1)}\nabla_{-n}Y_n(s)-\tau_{-(n+2)}(s+1)\nabla_{-n}Y_n(s)+\widehat{\lambda}Y_n(s)=0.\tag{6.11}$$

记方程 (6.7) 另外的解为 $\widehat{Y}_n(s)$. 那么

$$\widehat{Y}_n(s)=\rho(s)\prod_{j=0}^{n-1}\sigma(s-j)\int_N^s\frac{1}{\rho(t)\prod\limits_{j=0}^{n}\sigma(t-j)}\mathrm{d}_\nabla x_{-n}(t).\tag{6.12}$$

现在，对方程 (6.7), 让 $Y_n^{(n)}(s)=\Delta_{-n}^{(n)}Y_n(s)$. 那么 $Y_n^{(n)}(s)$ 满足

$$\widehat{\sigma}(s)\Delta_{-1}\nabla_0 Y_n^{(n)}(s)+\widehat{\tau}_n(s)\Delta_0 Y_n^{(n)}(s)+\widehat{\mu}_n Y_n^{(n)}(s)=0.\tag{6.13}$$

由递推关系式 (3.6) 和 (3.7), 对任何非负整数 k, 我们有

$$\begin{aligned}\widehat{\tau}_k(s)&=\frac{\widehat{\sigma}(s+k)-\widehat{\sigma}(s)+\widehat{\tau}(s+k)\Delta x_{-n}(s+k-\frac{1}{2})}{\Delta x_{-n}(s+\frac{k-1}{2})}\\&=\frac{\sigma(s-n+k+1)-\sigma(s-1)-\tau(s-1)\nabla x_{-1}(s)}{\Delta x_{-n}(s+\frac{k-1}{2})}\\&=-\tau_{-(n-k+2)}(s+1),\end{aligned}\tag{6.14}$$

且

$$\hat{\mu}_n=\hat{\lambda}+\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_{k-n}\hat{\tau}_k(s).\tag{6.15}$$

当 k 是一个负整数，我们也将 (6.14) 式的右边记为 $\widehat{\tau}_k(s)$. 当 $k=n$, 我们得到

$$\widehat{\tau}_n(s)=\frac{\sigma(s+1)-\sigma(s-1)}{\Delta x(s-\frac{1}{2})}-\tau(s-1)\frac{\nabla x_{-1}(s)}{\Delta x_{-1}(s)}=-\tau_{-2}(s+1)=\tau^*(s).$$

由与第 5 节相同的方法，方程 (6.13) 可被改写为

$$\sigma(s+1)\Delta_{-1}\nabla_0Y_n(s)-\tau_{-2}(s+1)\nabla_0Y_n(s)+\hat{\mu}_nY_n(s)=0. \tag{6.16}$$

为了计算 $\widehat{\mu}_n$, 我们需要一个引理，它的证明类似于命题 4.1.

引理 6.1 给定一个整数 k, 如果 $x(s)=c_1q^s+c_2q^{-s}+c_3$, 那么

$$\begin{aligned}\widehat{\tau}_k(s)&=\left[\frac{q^{k-n+2}-q^{n-k-2}}{q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}}\frac{\widetilde{\sigma}''}{2}-\left(q^{k-n+2}+q^{n-k-2}\right)\frac{\widetilde{\tau}'}{2}\right]x_{k-n}(s)+\widehat{c}_1(k)\\&=\{\nu[-2(n-k-2)]\frac{\widetilde{\sigma}''}{2}-\alpha[-2(n-k-2)]\tau'\}x_{n-k}(s)+\hat{c}_1(k)\\&=-\kappa_{2(n-k-2)+1}x_{k-n}+\hat{c}_1(k);\end{aligned}$$

如果 $x(s)=\widetilde{c}_1s^2+\widetilde{c}_2s+\widetilde{c}_3$, 那么

$$\widehat{\tau}_k(s)=[(k-n+2)\widetilde{\sigma}''-\widetilde{\tau}']\,x_{k-n}(s)+\widehat{c}_2(k)=-\kappa_{2(n-k-2)+1}x_{k-n}+\hat{c}_2(k);$$

这里 $\widehat{c}_1(k),\widehat{c}_2(k)$ 是关于 k 的函数

$$\begin{aligned}\widehat{c}_1(k)=&\frac{q^{\frac{k-n+2}{2}}-q^{\frac{n-k-2}{2}}}{q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}}[\widetilde{\sigma}'(0)+c_3(2-q^{\frac{k-n+2}{2}}-q^{\frac{n-k-2}{2}})]\\&+\widetilde{\tau}(0)(q^{\frac{k-n+2}{2}}+q^{\frac{n-k-2}{2}})+c_3\widetilde{\tau}'^{\frac{k-n+2}{2}})(q^{\frac{k-n+2}{2}}-q^{n-k-2}),\\\widehat{c}_2(k)=&\widetilde{\sigma}'(0)(k-n+2)+\frac{\widetilde{\sigma}''}{4}\widetilde{c}_1(k-n+2)^3+\frac{3\widetilde{\tau}'}{4}\widetilde{c}_1(k-n+2)^2+2\widetilde{\tau}(0).\end{aligned}$$

推论 6.1 如果 $x(s)=c_1q^s+c_2q^{-s}+c_3$ 或 $x(s)=\widetilde{c}_1s^2+\widetilde{c}_2s+\widetilde{c}_3$, 那么

$$\widehat{\mu}_n=-\kappa_{-1}-\kappa_n\nu(n)=-\kappa_{n-1}\nu(n+1).$$

证 由 (6.10) 式，我们看到 $\hat{\lambda}=\Delta_{-(n+1)}\tau_{-(n+1)}(s)=\Delta_{-(n+1)}\hat{\tau}_{-1}(s)$. 那么，我们将 (6.15) 式写成

$$\widehat{\mu}_n=\hat{\lambda}+\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_{k-n}\widehat{\tau}_k(s)=\sum_{k=-1}^{n-1}\Delta_{k-n}\widehat{\tau}_k(s). \tag{6.17}$$

那么由引理 6.1, 如果 $x(s)=c_1q^s+c_2q^{-s}+c_3$, 则

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_n&=\sum_{k=-1}^{n-1}\left[\frac{q^{k-n+2}-q^{n-k-2}}{q^{\frac{1}{2}}-q^{\frac{1}{2}}}\frac{\sigma''}{2}-\left(q^{k-n+2}+q^{n-k-2}\right)\frac{\tau'}{2}\right]\\&=\sum_{k=-1}^{n-1}\left[\frac{q^{-k}-q^k}{q^{\frac{1}{2}}-q^{\frac{1}{2}}}\frac{\sigma''}{2}-\left(q^{-k}+q^k\right)\frac{\tau'}{2}\right]\\&=-\kappa_{-1}+\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{q^{-k}-q^k}{q^{\frac{1}{2}}-q^{\frac{1}{2}}}\frac{\sigma''}{2}-\left(q^{-k}+q^k\right)\frac{\tau'}{2}\right]\\&=-\kappa_{-1}-\kappa_n\nu(n)=-\kappa_{n-1}\nu(n+1).\end{aligned}$$

如果 $x(s)=\widetilde{c}_1s^2+\widetilde{c}_2s+\widetilde{c}_3$, 则

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_n&=\sum_{k=-1}^{n-1}[(k-n+2)\sigma''-\tau']=\sum_{k=-1}^{n-1}[-k\sigma''-\tau']\\&=-\kappa_{-1}+\sum_{k=0}^{n-1}[-k\sigma''-\tau']=-\kappa_{-1}-n\kappa_n=-(n+1)\kappa_{n-1}.\end{aligned}$$

证毕.

定理 6.1 如果 $\lambda=\lambda_n=-\kappa_n\nu(n)$, 那么方程 (6.13) 是

$$L^*[Y_n^{(n)}(s)]=0.$$

证 我们仅证明当 $\lambda=\lambda_n$ 的情形，有 $\widehat{\mu}_n=\lambda^*$. 由 (5.10) 式和命题 4.1, 有

$$\begin{aligned}\lambda^*&=\lambda_n-\Delta_{-1}\left(\tau(s-1)\frac{\nabla x_{-1}(s)}{\nabla x(s)}-\frac{\nabla\sigma(s)}{\nabla x(s)}\right)\\&=\lambda_n-\Delta_{-1}\tau_{-1}(s)=-\kappa_n\nu(n)-\kappa_{-1}=-\kappa_{n-1}\nu(n+1).\end{aligned}\tag{6.18}$$

因此，由推论 6.1, 我们得到 $\widehat{\mu}_n=\lambda^*$.

由等式 (5.11), 我们有 $L[\frac{1}{\rho}Y_n^{(n)}]=L^*[Y_n^{(n)}]=0$. 那么我们得到 Rodrigues 型公式的一个推广：

定理 6.2 如果

$$\lambda=\lambda_n \text{ 且 } \lambda_m\neq\lambda_n \text{ 对 } m=0,1,\cdots,n-1,$$

那么方程 (3.1) 的通解是

$$\begin{aligned}y_n(s)&=\frac{C_1}{\rho(x)}\Delta_{-n}^{(n)}[\rho(s)\prod_{j=0}^{n-1}\sigma(s-j)]\\&\quad+\frac{C_2}{\rho(x)}\Delta_{-n}^{(n)}\left[\rho(s)\prod_{j=0}^{n-1}\sigma(s-j)\int_N^s\frac{1}{\rho(t)\prod\limits_{j=0}^{n}\sigma(t-j)}d_\nabla x_{-n}(t)\right].\end{aligned}$$

7 更一般的 Rodrigues 公式

命题 7.1[10, p62] 设格子函数 $x(s)$ 具有形式

$$x(s)=c_1q^s+c_2q^{-s}+c_3 \text{ 或 } x(s)=c_1s^2+c_2s+c_3,$$

这里 q,c_1,c_2,c_3 为常数. 如果 $P_n[x_k(s)]$ 是关于 $x_k(s)$ (k 是一任意整数) 的 n 阶多项式，那么 $\Delta_kP_n[x_k(s)]$ 是一个关于 $x_{k+1}(s)$ 的 $n-1$ 阶多项式.

我们把 (5.7) 式与同类型的差分方程联系起来

$$\sigma^*(s)\Delta_{-(n+1)}\nabla_{-n}v(s)+\gamma(s,n)\Delta_{-n}v(s)+\eta(n)v(s)=P_{n-1}[x_{-n}(s)],\tag{7.1}$$

这里 $\gamma(s,n)$ 和 $\eta(n)$ 待定，且 $P_{n-1}[x_{-n}(s)]$ 是一个关于 $x_{-n}(s)$ 的 $n-1$ 阶任意多项式. 现假定

$$\begin{aligned}&\Delta_{-n}^{(n)}\left[\sigma^*(s)\Delta_{-(n+1)}\nabla_{-n}v(s)+\gamma(s,n)\Delta_{-n}v(s)+\eta(n)v(s)\right]\\&=\sigma^*(s)\Delta_{-1}\nabla_0w(s)+\tau^*(s)\Delta_0w(s)+\lambda^*w(s)=0\end{aligned}$$

且

$$w(s)=\Delta_{-n}^{(n)}v(s).$$

进一步，我们假设

$$\begin{aligned}&\sigma^*(s)\Delta_{-n-1}\nabla_{-n}v(s)+\gamma(s,n)\Delta_{-n}v(s)+\eta(n)v(s)\\ =&\Delta_{-(n+1)}\left[\sigma^*(s)\nabla_{-n}v(s)+\ell(s,n)v(s)\right],\end{aligned}\tag{7.2}$$

这里 $\ell(s,n)$ 待定. 现在，由递推关系式 (3.6) 和 (3.7), 对任何非负整数 k, 我们有

$$\gamma_k(s,n)=\frac{\sigma^*(s+k)-\sigma^*(s)+\gamma(s+k,n)\Delta x_{-n}(s+k-\frac{1}{2})}{\Delta x_{-n+k-1}(s)},\ \gamma_0(s,n)=\gamma(s,n),$$

$$\eta_k(n)=\eta(n)+\sum_{j=0}^{k-1}\Delta_{j-n}\gamma_j(s,n),\ \eta_0(n)=\eta(n).$$

当 $k=n$, 则有

$$\begin{aligned}\tau^*(s)=\gamma_n(s,n)&=\frac{\sigma^*(s+n)-\sigma^*(s)+\gamma(s+n,n)\Delta x_{-n}(s+n-\frac{1}{2})}{\Delta x_{-n}(s+\frac{n-1}{2})}\\ &=\frac{\sigma(s+1)-\sigma(s-1)}{\Delta x_{-1}(s)}-\tau(s-1)\frac{\nabla x_{-1}(s)}{\Delta x_{-1}(s)},\end{aligned}\tag{7.3}$$

$$\lambda^*=\eta(n)+\sum_{j=0}^{n-1}\Delta_{j-n}\gamma_j(s,n)=\lambda-\nabla_{-1}\left(\tau(s-1)\frac{\nabla x_{-1}(s)}{\nabla x(s)}-\frac{\nabla\sigma(s)}{\nabla x(s)}\right).\tag{7.4}$$

由 (7.3) 式，我们得

$$\gamma(s,n)=\frac{\sigma(s-n+1)-\sigma(s-1)-\tau(s-1)\nabla x_{-1}(s)}{\Delta x_{-n}(s-\frac{1}{2})}.\tag{7.5}$$

进一步，从 (7.2) 式和命题 2.1, 我们得

$$\ell(s+1,n)\frac{\Delta x_{-n}(s)}{\Delta x_{-(n+1)}(s)}+\Delta_{-(n+1)}\sigma^*(s)=\gamma(s,n),\tag{7.6}$$

$$\Delta_{-(n+1)}\ell(s,n)=\eta(n).\tag{7.7}$$

从 (7.5) 和 (7.6) 式，我们得

$$\ell(s,n)=\frac{\sigma(s-n)-\sigma(s-1)-\tau(s-1)\nabla x_{-1}(s)}{\nabla x_{-n}(s)}.\tag{7.8}$$

那么， $\eta(n)=\widehat{\lambda}$. 现在，我们计算 λ. 注意到，对任何非负整数 k, 有

$$\gamma_k(s,n)=\frac{\sigma(s+k-n+1)-\sigma(s-1)-\tau(s-1)\nabla x_{-1}(s)}{\Delta x_{k-n-1}(s)}=\widehat{\tau}_k(s).$$

由 (6.17) 和 (6.18) 式，可得

$$\lambda_n=\nabla_{-1}\tau_{-1}(s)+\widehat{\lambda}+\sum_{j=0}^{n-1}\Delta_{j-n}\widehat{\tau}_k(s).$$

那么由 (7.4), 我们得 $\lambda = \lambda_n$.

由命题 7.1, 可得

$$\sigma^*(s)\nabla_{-n}v(s) + \ell(s,n)v(s) = P_n[x_{-(n+1)}(s)]. \tag{7.9}$$

现在，我们解方程 (7.9). 首先，我们考虑下面方程的解

$$\sigma^*(s)\nabla_{-n}v(s) + \ell(s)v(s) = 0. \tag{7.10}$$

方程 (7.10) 可被改写为

$$\sigma(s-n)v(s) = \left(\sigma(s-1) + \tau(s-1)\nabla x_{-1}(s)\right) v(s-1). \tag{7.11}$$

进一步，由 Pearson 方程 (5.3), 可得

$$\rho(s)\sigma(s) = \left[\sigma(s-1) + \tau(s-1)\nabla x_{-1}(s)\right] \rho(s-1).$$

那么方程 (7.11) 变成

$$\frac{v(s)}{v(s-1)} = \frac{\rho(s)\sigma(s)}{\rho(s-1)\sigma(s-n)}.$$

容易证明以上方程的解是

$$v(s) = C\rho(s)\prod_{i=0}^{n-1}\sigma(s-i),$$

这里 C 是一个常数.

现在，让

$$v(s) = C(s)\rho(s)\prod_{i=0}^{n-1}\sigma(s-i). \tag{7.12}$$

那么，将 (7.12) 式代入 (7.9) 式，则有

$$\nabla_{-n}C(s) = \frac{P_n[x_{-(n+1)}(s)]}{\rho(s)\prod\limits_{i=0}^{n}\sigma(s-i)}.$$

然后，应用命题 2.2, 可得

$$C(s) = \int_N^s \frac{P_n[x_{-(n+1)}(t)]}{\rho(t)\prod\limits_{i=0}^{n}\sigma(t-i)} \mathrm{d}_\nabla x_{-n}(t) + \widetilde{C},$$

这里 $\widetilde{C}$ 是一个常数. 由于

$$\rho(s)y(s) = w(s) = \Delta_{-n}^{(n)}v(s),$$

我们得如下定理.

定理 7.1 如果

$$\lambda = \lambda_n \text{ 和 } \lambda_m \neq \lambda_n \text{ 对 } m = 0, 1, \cdots, n-1,$$

那么方程 (3.1) 的通解是

$$
\begin{aligned}
y_n(s) = {} & \frac{C}{\rho(x)}\Delta_{-n}^{(n)}[\rho(s)\prod_{j=0}^{n-1}\sigma(s-j)] \\
& + \frac{1}{\rho(x)}\Delta_{-n}^{(n)}\left[\rho(s)\prod_{j=0}^{n-1}\sigma(s-j)\int_N^s \frac{P_n[x_{-(n+1)}(t)]}{\rho(s)\prod\limits_{j=0}^{n}\sigma(t-j)}\mathrm{d}_\nabla x_{-n}(t)\right],
\end{aligned}
$$

这里 C 是任意常数且 $P_n(\cdot)$ 是一个 n - 阶多项式.

参 考 文 献

[1] Ince E L. Ordinary Differential Equations. New York: Dover Publications, 1944

[2] Hille E. Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. New York: Dover Publications, 1997

[3] Goncalves V J. Sur la formule de rodrigues. Portugaliae Math, 1943, **4**: 52–64

[4] Erdelyi A. Higher Transcendental Functions (Volume 1). New York: MacGraw-Hill, 1953

[5] Horner J M. A Note on the derivation of Rodrigues' formulae. The American Mathematical Monthly, 1963, **70**(1): 81–82

[6] Horner J M. Generalizations of the formulas of Rodrigues and Schlafli. The American Mathematical Monthly, 1963, **71**(8): 870–876

[7] Koekoek R, Lesky P E, Swarttouw R F. Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues. Berlin: Springer-Verlag, 2010

[8] Nikiforov A F, Urarov V B. Classical orthogonal polynomials of a discrete variable on non-uniform lattices. Akad Nauk SSSR Inst Prikl Mat, 1983, Preprint

[9] Nikiforov A F, Uvarov V B. Special Functions of Mathematical Physics. A Unified Introduction with Applications. Basel: Birkhauser Verlag, 1988

[10] Nikiforov A F, Suslov S K, Uvarov V B. Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable. Berlin: Springer-Verlag, 1991

[11] Wang Z X, Guo D R. Special Functions. Singapore: World Scientific Publishing, 1989

[12] Andrews G, Askey R. Classical Orthogonal Polynomials//Brezinski, Draux, et al. Polynomes Orthogonaux et Applications. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1985: 36–62

[13] George E, Andrews G, Askey R, Roy R. Special Functions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1999

[14] Askey R, Wilson J. A set of orthogonal polynomials that generalize the Racah coefficients or 6j-symbols. SIAM J Math Anal, 1979, **10**: 1008–1016

[15] Askey R, Ismail R. Recurrence Relations, Continued Fractions and Orthogonal Polynomials//Mem Amer Math Soc. Providence, RI: Amer Math Soc, 1984, **49**: 300

[16] Askey R, Wilson J. Some Basic Hypergeometric Orthogonal Polynomials that Generalize Jacobi Polynomials//Mem Amer Math Soc Providence, RI: Amer Math Soc, 1985, **54**: 319

[17] Mourad E, Ismail R, Carl A. Contiguous relations, basic hypergeometric functions, and orthogonal polynomials (I). Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1989, **141**: 349–372

[18] Suslov S K. On the theory of difference analogues of special functions of hypergeometric type. Russian Math Surveys, 1989, **44**(2): 227–278

[19] Atakishiyev N M, Suslov S K. Difference Hypergeometric Functions//Progress in Approximation Theory. New York: Springer, 1992: 1–35

[20] Atakishiyev N M, Rahman M, Suslov S K. On classical orthogonal polynomials. Constr Approx, 1995, **11**(2): 181–226

[21] George G, Rahman R. Basic Hypergeometric Series (2nd edition). Cambridge: Cambridge University Press, 2004

[22] Koornwinder T M. q-Special functions, a tutorial. 1994, arXiv: math/9403216

[23] Area I, Godoy E, Ronveaux A, Zarzo A. Hypergeometric-type differential equations: second kind solutions and related integrals. J Comput Appl Math, 2003, **157**(1): 93–106

[24] Robin R. On the Rodrigues formula solution of the hypergeometric-type differential equation. International Mathematical Forum, 2013, **8**(30): 1455–1466

[25] Alvarez-Nodarse R, Arvessu J. On the q-polynomials in the exponential lattice $x(s) = c_1q^s + c_3$. Integral Transform Spec Funct, 1999, **8**(3/4): 299–324

[26] Alvarez-Nodarse R, Cardoso J. Recurrence relations for discrete hypergeometric functions. J Difference Equ Appl, 2005, **11**(9): 829–850

[27] Alvarez-Nodarse R, Cardoso J. On the properties of special functions on the linear-type lattices. Journal of Mathmatical Analysis Applications, 2011, **405**(3): 271–285

[28] Area I, Godoy E, Ronveaux A, Zarzo A. Hypergeometric type q-difference equations: Rodrigues type representation for the second kind solution. J Comput Appl Math, 2005, **173**(1): 81–92

[29] Bangerezako G. Variational calculus on q-nonuniform lattices. J Math Anal Appl, 2005, **306**(2): 161–179

[30] Dreyfus T. q-deformation of meromorphic solutions of linear differential equations. J Differential Equations 2015, **259**(11): 5734–5768

[31] Kac V, Cheung P. Quantum Calculus. New York: Springer-Verlag, 2002

[32] Jia L K, Cheng J F, Feng Z S. A q-analogue of Kummer's equation. Electron J Differential Equations, 2017, **31**: 1–20

[33] Magnus A P. Special nonuniform lattice (snul) orthogonal polynomials on discrete dense sets of points// Proceedings of the International Conference on Orthogonality, Moment Problems and Continued Fractions, 1995, **65**: 253–265

[34] Foupouagnigni M. On difference equations for orthogonal polynomials on nonuniform lattices. J Difference Equ Appl, 2008, **14**(2): 127–174

[35] Foupouagnigni M, Koepf M, Kenfack-Nangho K, Mboutngam S. On solutions of holonomic divided-difference equations on nonuniform lattices. Axioms, 2013, **2**(3): 404–434

[36] Witte N S. Semi-classical orthogonal polynomial systems on non-uniform lattices, deformations of the Askey table and analogs of isomonodromy. Nagoya Math J, 2015, **219**: 127–234

Hypergeometric Type Difference Equations on Nonuniform Lattices: Rodrigues Type Representation for the Second Kind Solution

Cheng Jinfa   Jia Lukun

(*School of Mathematical Science, Xiamen University, Fujian Xiamen 361005*)

Abstract: By building a second order adjoint equation, the Rodrigues type representation for the second kind solution of a second order difference equation of hypergeometric type on nonuniform lattices is given. The general solution of the equation in the form of a combination of a standard Rodrigues formula and a "generalized" Rodrigues formula is also established.

Key words: Special function; Orthogonal polynomial; Adjoint difference equation; Hypergeometric difference equations; Nonuniform lattice.

MR(2010) Subject Classification: 33D45; 33C45