2019,**39A**(3):596–610

数学物理学报 Acta Mathematica Scientia

http://actams.wipm.ac.cn

带有未知内部扰动的星形 Euler-Bernoulli 梁网络的指数跟踪控制 *

[1] 张雅轩 ** [2] 许跟起 [1] 郭燕妮

([1] 中国民航大学理学院数学系 天津 300300; [2] 天津大学数学学院 天津 300350)

摘要：该文研究了带有未知内部扰动的星形 Euler-Bernoulli 梁网络的指数跟踪控制问题．首先将该问题等价转化为跟踪网络与被跟踪网络的误差网络的镇定问题．利用滑模控制思想，对误差网络设计了非线性反馈控制方案．通过对状态空间选取适当的范数，运用单调算子理论得到了误差网络的适定性．通过构造适当的 Lyapunov 函数，证明误差网络按任一收敛率指数稳定．这表明跟踪网络能够按任一给定速率以指数速度跟踪到目标网络．

关键词：跟踪控制；未知内部扰动；星形 Euler-Bernoulli 梁网络；滑模控制；指数镇定．

MR(2010) 主题分类：93D15 **中图分类号**：O231.9 **文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2019)03-596-15

1 引言

本文研究带有未知内部扰动的星形 Euler-Bernoulli 梁网络的指数跟踪控制．拟跟踪的目标网络如下：

$$\begin{cases} w_{j,tt}(x,t)+a_j^2 w_{j,xxxx}(x,t)=d_j(x,t), \quad x\in(0,1), t>0,\\ w_1(0,t)=w_2(0,t)=w_3(0,t),\\ a_1^2 w_{1,xxx}(0,t)+a_2^2 w_{2,xxx}(0,t)+a_3^2 w_{3,xxx}(0,t)=0,\\ w_{j,xx}(0,t)=0,\\ w_{j,xx}(1,t)=0,\\ w_{j,xxx}(1,t)=0,\\ w_j(x,0)=w_j^0(x), \quad w_{j,t}(x,0)=w_j^1(x), \quad j=1,2,3, \end{cases} \tag{1.1}$$

收稿日期: 2017-05-27; 修订日期: 2018-01-16

E-mail: bunnyxuan@tju.edu.cn

* 基金项目：国家自然科学基金 (61503385, 11705279) 、中央高校基本科研业务费 (3122018L004) 和天津市教委科研计划项目 (2018KJ253)

Supported by the NSFC (61503385, 11705279), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (3122018L004) and the Scientific Research Project of Tianjin Municipal Education Commission (2018KJ253)

** 通讯作者

其中 $d_j(x,t)$ 表示未知的内部扰动，它满足性质 $M_j := \sup_{t\geq 0}\|d_j(t)\|_{L^2[0,1]} < \infty, j = 1,2,3.$

近年来，由于应用范围较广 (如计算机技术、机器人、生物学、军事等)，跟踪控制研究受到诸多学者的重视. 通常，根据不同的实际背景和研究需求，目标网络由常微分方程 (ODE) 或偏微分方程 (PDE) 描述. 对 ODE 情形，跟踪控制研究已有很多好的成果，参见文献 [1–3]. 而近来更多学者着手研究 PDE 情形，如热方程、波方程、Euler-Bernoulli 方程，这是因为 PDE 对系统的描述更加精确. 例如，文献 [4–6] 分别运用线性矩阵不等式与滑模控制方法研究了热方程网络的同步问题. 文献 [7] 设计了后步状态观测器，用于跟踪高维热方程网络的动态行为. 文献 [8–9] 研究了基于 PDE 方法的多智能体系统跟踪控制. 文献 [10] 在某类特殊初值条件下，对 Euler-Bernoulli 梁设计了能够以渐近速度进行跟踪的控制方案.

由于在实际中，系统无法避免会受到来自外部或内部的未知扰动，这有可能使系统行为受到影响. 因此，对跟踪控制的研究必须将扰动考虑在内. 而对 PDE 跟踪控制，如果考虑到扰动，控制设计必须做到两点：一是确保跟踪系统以足够快的速率跟踪目标系统. 二是要消除扰动引起的不确定性. 一般来说，消除不确定性有两种有效方法：滑模控制 (SMC) 与自抗扰控制 (ADRC)，这方面已有不少好的结果. SMC 方法 (见参考文献 [11]) 本是处理 ODE 的有力工具且具有很多优势，所以很多学者尝试将这种方法移植到对 PDE 的控制设计中. 例如，文献 [12] 将 SMC 用于带有未知内部扰动的波方程的控制，文献 [13] 针对带有边界输入扰动的一阶线性双曲系统给出了其指数镇定的一阶滑模控制器，文献 [14] 研究了带有边界不确定性的双曲型偏微分方程的鲁棒边界镇定，文献 [15] 考虑了带有输入扰动的扩散型 PDE 网络的同步控制，文献 [16] 应用 SMC 研究了带有内部扰动的 Timoshenko 梁的指数稳定性，文献 [17–18] 运用 SMC 控制思想讨论了带有边界扰动的 ODE- 波方程串联系统和热 PDE-ODE 串联系统的镇定.

ADRC 方法最早由韩京清在文献 [19] 中提出，用于解决带有不确定性的 ODE 的控制. 此后有众多学者尝试将此方法用于对 PDE 的研究. 例如，文献 [20] 运用 ADRC 方法研究了带有边界输入扰动的热方程 -ODE 耦合的系统的镇定. 文献 [21–23] 对带有边界输入扰动的波方程、 Euler-Bernoulli 梁方程、薛定谔方程，分别运用 SMC 和 ADRC 给出了不同的控制方案.

尽管结果已相对较多，然而就作者所知，对于诸如网络 (1.1) 的带有未知分布扰动的 Euler-Bernoulli 梁网络，尚未实现其快速跟踪控制. 本文将对网络 (1.1) 设计一种非线性的滑模控制方案，以使其能够以任意速率实现指数速度的跟踪. 具体的设计思想如下.

根据目标网络 (1.1) 的结构特点，首先设计跟踪网络为

$$\begin{cases} \widetilde{w}_{j,tt}(x,t) + a_j^2\widetilde{w}_{j,xxxx}(x,t) = 0, \quad x\in(0,1), t>0, \\ \widetilde{w}_1(0,t) = \widetilde{w}_2(0,t) = \widetilde{w}_3(0,t), \\ a_1^2\widetilde{w}_{1,xxx}(0,t) + a_2^2\widetilde{w}_{2,xxx}(0,t) + a_3^2\widetilde{w}_{3,xxx}(0,t) = 0, \\ \widetilde{w}_{j,xx}(0,t) = 0, \\ \widetilde{w}_j(1,t) = 0, \\ \widetilde{w}_{j,x}(1,t) = 0, \\ \widetilde{w}_j(x,0) = \widetilde{w}_j^0(x), \quad \widetilde{w}_{j,t}(x,0) = \widetilde{w}_j^1(x), \quad j = 1,2,3. \end{cases} \tag{1.2}$$

本文的目标是设计一种控制方案，使得跟踪网络能够按任意速率以指数速度跟踪目标网络. 注意到该问题与误差网络能够按任意速率指数镇定等价，其中误差是指

$$e_j(x,t) := w_j(x,t) - \widetilde{w}_j(x,t).$$

如果没有扰动，即 $d_j(x,t)=0, j=1,2,3,$ 则可在网络 (1.1) 中取控制方案为

$$\begin{cases} a_j^2 w_{j,xx}(1,t) = -\alpha_j w_{j,xt}(1,t) + a_j^2 \widetilde{w}_{j,xx}(1,t), \\ a_j^2 w_{j,xxx}(1,t) = -\beta_j w_{j,t}(1,t) + a_j^2 \widetilde{w}_{j,xxx}(1,t), \quad j=1,2,3, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $\alpha_j, \beta_j > 0, j=1,2,3$ 为反馈增益常数. 于是由 (1.1)–(1.3) 式可得如下误差网络

$$\begin{cases} e_{j,tt}(x,t) + a_j^2 e_{j,xxxx}(x,t) = 0, \quad x\in(0,1), t>0, \\ e_1(0,t) = e_2(0,t) = e_3(0,t), \\ a_1^2 e_{1,xxx}(0,t) + a_2^2 e_{2,xxx}(0,t) + a_3^2 e_{3,xxx}(0,t) = 0, \\ e_{j,xx}(0,t) = 0, \quad j=1,2,3, \\ a_j^2 e_{j,xx}(1,t) = -\alpha_j e_{j,xt}(1,t), \\ a_j^2 e_{j,xxx}(1,t) = -\beta_j e_{j,t}(1,t), \\ e_j(x,0) = w_j^0(x) - \widetilde{w}_j^0(x) := e_j^0(x), \\ e_{j,t}(x,0) = w_j^1(x) - \widetilde{w}_j^1(x) := e_j^1(x), \quad j=1,2,3. \end{cases} \tag{1.4}$$

容易证明网络 (1.4) 指数稳定 (参见文献 [24]). 这表明在控制方案 (1.3) 下，网络 (1.2) 能够以指数速度跟踪网络 (1.1).

然而, 如果考虑到系统中存在着扰动 $d_j(x,t)$, 就必须重新设计控制方案. 本文运用 SMC 的控制设计思想，确定内部控制为

$$u_j(x,t) = -2\rho_j e_{j,t}(x,t) - (\rho_j^2+\rho_j)e_j(x,t) - M_j \frac{e_{j,t}(x,t)+\rho_j e_j(x,t)}{\|e_{j,t}(t)+\rho_j e_j(t)\|_{L^2}}, \tag{1.5}$$

其中 $\rho_j>0,\ 0<M_j=\sup\limits_{t\geq 0}\|d_j(t)\|_{L^2}<\infty.$

假设状态 $\widetilde{w}_{j,xx}(1,t), \widetilde{w}_{j,xxx}(1,t), j=1,2,3$ 可观，确定边界控制为

$$\begin{cases} w_{j,xx}(1,t) = \widetilde{w}_{j,xx}(1,t), \\ w_{j,xxx}(1,t) = \widetilde{w}_{j,xxx}(1,t), \quad j=1,2,3. \end{cases} \tag{1.6}$$

于是误差系统为

$$\begin{cases} e_{j,tt}(x,t) + a_j^2 e_{j,xxxx}(x,t) = -2\rho_j e_{j,t}(x,t) - (\rho_j^2+\rho_j)e_j(x,t) - M_j \frac{e_{j,t}(x,t)+\rho_j e_j(x,t)}{\|e_{j,t}(t)+\rho_j e_j(t)\|_{L^2}} \\ \qquad\qquad +d_j(x,t), \quad x\in(0,1), t>0, \\ e_1(0,t) = e_2(0,t) = e_3(0,t), \\ a_1^2 e_{1,xxx}(0,t) + a_2^2 e_{2,xxx}(0,t) + a_3^2 e_{3,xxx}(0,t) = 0, \\ e_{j,xx}(0,t) = 0, \\ e_{j,xx}(1,t) = e_{j,xxx}(1,t) = 0, \\ e_j(x,0) = e_j^0(x), \quad e_{j,t}(x,0) = e_j^1(x), \quad j=1,2,3. \end{cases} \tag{1.7}$$

本文将证明系统 (1.7) 可解且按任意速率指数镇定. 事实上，对于系统 (1.7) 的能量泛函

$$E(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_0^1 [a_j^2|e_{j,xx}(x,t)|^2 + |e_{j,t}(x,t)|^2]\mathrm{d}x, \tag{1.8}$$

其中被积函数的两项分别表示势能和动能，后文将证明

$$E(t) \le C\mathrm{e}^{-2\rho t}E(0),$$

其中 $\rho=\min\{\rho_1,\rho_2,\rho_3\}$, 而 C 是只与系统参数 $\rho_j, a_j, j=1,2,3$ 有关的正常数.

由此可知，对任意 $\eta>0$, 只需在控制方案 (1.5) 中取控制常数 $\rho_j>\eta, j=1,2,3$, 就能够保证跟踪系统 (1.2) 按速率 $\eta>0$ 以指数速度跟踪目标系统 (1.1).

本文内容安排如下. 第 2 节给出状态空间的合适范数并证明一些有用的引理. 第 3 节利用单调算子理论证明系统 (1.7) 的可解性. 第 4 节通过构造适当的 Lyapunov 函数证明系统 (1.7) 的指数稳定性. 第 5 节对文章作出总结.

2 规范化与有用的引理

为了证明系统 (1.7) 的可解性和指数稳定性，需将系统 (1.7) 规范化到合适的 Hilbert 状态空间，并对空间构造适当的等价范数. 本文用 $L^2[0,1]$ 表示 1- 维平方可积函数空间，内积为

$$\langle f,g\rangle_{L^2}=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x,\quad \forall\, f,g\in L^2[0,1].$$

它是 Hilbert 空间. 同时用 $H^k[0,1]$ 表示 1 - 维的 k 阶导数平方可积的绝对连续函数构成的 Sobolev 空间，其内积为

$$\langle f,g\rangle_{H^2}=a\langle f'',g''\rangle_{L^2}+\rho\langle f,g\rangle_{L^2},\quad \forall\, f,g\in H^2[0,1],$$

其中 c 和 ρ 为正常数.

令

$$H_e^2[0,1]=\left\{Y=\{y_j\}_{j=1}^3\middle|\begin{array}{l} y_j\in H^2[0,1], j=1,2,3\\ y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)\end{array}\right\},$$

其中 $Y=\{y_j\}_{j=1}^3$ 表示函数向量，其分量为 y_1, y_2 和 y_3.

定义系统 (1.7) 的状态空间为

$$\mathcal{H}=H_e^2[0,1]\times\prod_{j=1}^3 L^2[0,1],$$

其内积为

$$\langle (Y,Z),(F,G)\rangle_{\mathcal{H}}=\sum_{j=1}^3\int_0^1[a_j^2y_j''(x)f_j''(x)+z_j(x)g_j(x)+\rho_jy_j(x)f_j(x)]\mathrm{d}x,$$

其中 $(Y,Z)=(\{y_j\}_{j=1}^3,\{z_j\}_{j=1}^3), (F,G)=(\{f_j\}_{j=1}^3,\{g_j\}_{j=1}^3)\in\mathcal{H}$.

容易证明上述内积导出的范数与空间通常定义的范数等价.

注 2.1 由空间 $\mathcal{H}$ 的内积定义，可得 $H_e^2[0,1]$ 的等价范数. 即对 $Y=\{y_j\}_{j=1}^3\in H_e^2[0,1]$, 有

$$\begin{aligned}\|Y\|^2_{H_e^2[0,1]}&=\sum_{j=1}^3[a_j^2\|y_j''\|^2_{L^2}+\rho_j\|y_j\|^2_{L^2}]\\&=\sum_{j=1}^3\int_0^1[a_j^2y_j''(x)y_j''(x)+\rho_jy_j(x)y_j(x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在 $\mathcal{H}$ 中定义算子 $\mathcal{A}$ 为

$$D(\mathcal{A})=\left\{(Y,Z)\in\mathcal{H}\left|\begin{array}{l}Y\in\prod_{j=1}^{3}H^4[0,1],Z\in H_e^2[0,1]\\ a_1^2y_1'''(0)+a_2^2y_2'''(0)+a_3^2y_3'''(0)=0\\ y_j''(0)=y_j''(1)=y_j'''(1)=0,\quad j=1,2,3\end{array}\right.\right\},\tag{2.1}$$

对任一 $(Y,Z)\in D(\mathcal{A})$,

$$\mathcal{A}(Y,Z)=\left(\{z_j-\rho_jy_j\}_{j=1}^3,\{-a_j^2y_j^{(4)}-\rho_jy_j-\rho_jz_j-M_j\frac{z_j}{\|z_j\|_{L^2}}\}_{j=1}^3\right).\tag{2.2}$$

记 $\mathbb{Y}(t)=(\{e_j(x,t)\}_{j=1}^3,\{e_{j,t}(x,t)+\rho_je_j(x,t)\}_{j=1}^3)\in\mathcal{H}$, 则系统 (1.7) 可写成如下等价的抽象发展方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{Y}(t)=\mathcal{A}\mathbb{Y}(t)+\mathcal{D}(t),\quad t>0,\\ \mathbb{Y}(0)=\mathbb{Y}_0,\end{cases}\tag{2.3}$$

其中 $\mathcal{D}(t)=(0,\{d_j(t)\}_{j=1}^3),\mathbb{Y}_0=(\{e_j^0(x)\}_{j=1}^3,\{e_j^1(x)+\rho_je_j^0(x)\}_{j=1}^3)\in\mathcal{H}$.

下列有关 (极大) 单调算子的定义与性质对后文的证明有用.

定义 2.1[25] 设 $\mathbb{X}$ 为实 Banach 空间, $\mathbb{X}^*$ 为其对偶, 称集合 $A\subset\mathbb{X}\times\mathbb{X}^*$(也即算子 $A:\mathbb{X}\to 2^{\mathbb{X}^*}$) 单调, 如果

$$\langle x_1-x_2,y_1-y_2\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}\geq 0,\quad\forall[x_i,y_i]\in A,i=1,2.$$

进一步地, 称单调算子 $A\subset\mathbb{X}\times\mathbb{X}^*$ 为极大单调, 如果它不真包含于 $\mathbb{X}\times\mathbb{X}^*$ 的任何一个单调子集.

下面的引理给出了单调算子成为极大单调算子的充分条件.

引理 2.1[25] 设 $\mathbb{X}$ 为实 Hilbert 空间, A 为 $\mathbb{X}\times\mathbb{X}$ 的单调子集, I 是 $\mathbb{X}$ 上的恒等算子. 若算子 $I+A$ 的值域 $R(I+A)$ 满足 $R(I+A)=\mathbb{X}$, 则 A 是极大单调算子.

下一个引理表明, 若系统算子为极大单调算子, 则系统可解.

引理 2.2[25] 设 $\mathbb{X}$ 为实 Hilbert 空间, $A\subset\mathbb{X}\times\mathbb{X}$ 是极大单调算子. 考虑 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+Ay(t)\ni f(t),\quad t\in(0,T),\\ y(0)=y_0,\end{cases}\tag{2.4}$$

其中 $y_0\in\mathbb{X}$, $f\in L^1(0,T;\mathbb{X})$. 则对任一 $y_0\in\overline{D(A)}$, $f\in L^1(0,T;\mathbb{X})$, 系统 (2.4) 都存在唯一的温和解 y.

定义 2.2[26−27] 称一个泛函 $\varphi:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ 在范数 $\|\cdot\|$ 的意义下 β - 强凸, 如果对 φ 的定义域的相对内部的一切 x,y, 以及一切 $s\in[0,1]$, 都有

$$\varphi(sx+(1-s)y)\leq s\varphi(x)+(1-s)\varphi(y)-\beta s(1-s)\|x-y\|^2.$$

引理 2.3[26] 若 $\varphi:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ 是 β - 强凸的泛函, 则优化问题 $\min\limits_{x\in D(\varphi)}\varphi(x)$ 存在唯一解.

定义 2.3[28] 设 H 为 Hilbert 空间, $\varphi:H\to(-\infty,+\infty]$ 是真函数. 定义 φ 在点 x 的次微分为如下向量值算子

$$\partial\varphi:H\to 2^H:x\mapsto\{u\in H\mid\langle y-x,u\rangle_H+\varphi(x)\leq\varphi(y),\ \forall x\in H\}.$$

称 φ 在 x 点 Gâteaux 可微，如果存在唯一的向量 $\nabla\varphi(x) \in H$, 使得

$$\langle y, \nabla\varphi(x)\rangle_H = \lim_{s\to 0} \frac{\varphi(x+sy)-\varphi(x)}{s}, \quad \forall y \in H,$$

并称 $\nabla\varphi(x)$ 为 φ 在点 x 的 Gâteaux 梯度.

引理 2.4[28] 设 H 为 Hilbert 空间， $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ 为真函数．则

$$\varphi(x^*) = \min \varphi(x) \Leftrightarrow 0 \in \partial\varphi(x^*).$$

进一步地，若 φ 是凸函数且在 x^* 点 Gâteaux 可微，则

$$\varphi(x^*) = \min \varphi(x) \Leftrightarrow \nabla\varphi(x^*) = 0.$$

为证明可解性，我们需要做如下准备工作.

任取定 $F = \{f_j\}_{j=1}^3, G = \{g_j\}_{j=1}^3 \in \prod_{j=1}^3 L^2[0,1]$. 对任意的 $Y = \{y_j\}_{j=1}^3 \in H_e^2[0,1]$, 定义泛函 Φ 如下

$$\begin{aligned}\Phi(Y) = {} & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^3 a_j^2 \|y_j''\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{\rho_j^2+3\rho_j+1}{2}\|y_j\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{M_j}{1+\rho_j}\|(1+\rho_j)y_j - f_j\|_{L^2} \\ & - \sum_{j=1}^3 \langle (1+\rho_j)f_j + g_j, y_j\rangle_{L^2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

可以证明有如下结论：

命题 2.1 设 $\Phi(Y)$ 由 (2.5) 式定义, 则 $\Phi(Y)$ 在空间 $H_e^2[0,1]$ 的范数意义下是强凸函数.

证 任给 $Y = \{y_j\}_{j=1}^3, Z = \{z_j\}_{j=1}^3 \in H_e^2[0,1]$ 以及 $s \in [0,1]$, 有

$$\begin{aligned} & s\Phi(Y) + (1-s)\Phi(Z) - \Phi(sY + (1-s)Z) \\ = {} & s\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^3 a_j^2\|y_j''\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{\rho_j^2+3\rho_j+1}{2}\|y_j\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{M_j}{1+\rho_j}\|(1+\rho_j)y_j - f_j\|_{L^2}\right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^3 \langle (1+\rho_j)f_j + g_j, y_j\rangle_{L^2}\right] + (1-s)\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^3 a_j\|z_j''\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{\rho_j^2+3\rho_j+1}{2}\|z_j\|_{L^2}^2\right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^3 \frac{M_j}{1+\rho_j}\|(1+\rho_j)z_j - f_j\|_{L^2} - \sum_{j=1}^3 \langle (1+\rho_j)f_j + g_j, z_j\rangle_{L^2}\right] \\ & - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^3 a_j^2\|sy_j'' + (1-s)z_j''\|_{L^2}^2 - \sum_{j=1}^3 \frac{\rho_j^2+3\rho_j+1}{2}\|sy_j + (1-s)z_j\|_{L^2}^2 \\ & - \sum_{j=1}^3 \frac{M_j}{1+\rho_j}\|(1+\rho_j)(sy_j + (1-s)z_j) - f_j\|_{L^2} \\ & + \sum_{j=1}^3 \langle (1+\rho_j)f_j + g_j, sy_j + (1-s)z_j\rangle_{L^2} \\ = {} & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^3 a_j^2\left[s\|y_j''\|_{L^2}^2 + (1-s)\|z_j''\|_{L^2}^2 - \|sy_j'' + (1-s)z_j''\|_{L^2}^2\right] \end{aligned}$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\frac{\rho_j^2+3\rho_j+1}{2}\left[s\|y_j\|_{L^2}^2+(1-s)\|z_j\|_{L^2}^2-\|sy_j+(1-s)z_j\|_{L^2}^2\right]$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\frac{M_j}{1+\rho_j}[s\|(1+\rho_j)y_j-f_j\|_{L^2}+(1-s)\|(1+\rho_j)z_j-f_j\|_{L^2}$$
$$-\|(1+\rho_j)(sy_j+(1-s)z_j)-f_j\|_{L^2}]$$
$$=\frac{s(1-s)}{2}\sum_{j=1}^{3}[a_j^2\|y_j''\|_{L^2}^2+\|z_j''\|_{L^2}^2-2\langle y_j'',z_j''\rangle_{L^2}]$$
$$+\frac{s(1-s)}{2}\sum_{j=1}^{3}(\rho_j^2+3\rho_j+1)[\|y_j\|_{L^2}^2+\|z_j\|_{L^2}^2-2\langle y_j,z_j\rangle_{L^2}]$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\frac{M_j}{1+\rho_j}[s\|(1+\rho_j)y_j-f_j\|_{L^2}+(1-s)\|(1+\rho_j)z_j-f_j\|_{L^2}$$
$$-\|s((1+\rho_j)y_j-f_j)+(1-s)((1+\rho_j)z_j-f_j)\|_{L^2}].$$

注意到 L^2 - 范数是凸泛函，即 $s\|y\|_{L^2}+(1-s)\|z\|_{L^2}\geq\|sy+(1-s)z\|_{L^2}$. 令 y 为 $(1+\rho_j)y_j-f_j$, z 为 $(1+\rho_j)z_j-f_j$, 则由上述推导可得

$$s\Phi(Y)+(1-s)\Phi(Z)-\Phi(sY+(1-s)Z)$$
$$\geq\frac{s(1-s)}{2}\sum_{j=1}^{3}a_j^2\|y_j''-z_j''\|_{L^2}^2+\frac{s(1-s)}{2}\sum_{j=1}^{3}(\rho_j^2+3\rho_j+1)\sum_{j=1}^{3}\|y_j-z_j\|_{L^2}^2.$$

利用空间 $H_e^2[0,1]$ 中范数的定义 (见注 2.1), 由上式可得

$$s\Phi(Y)+(1-s)\Phi(Z)-\Phi(sY+(1-s)Z)\geq\frac{Ms(1-s)}{2}\|Y-Z\|_{H_e^2[0,1]}^2,$$

其中 M 为正常数.

这表明 $\Phi(Y)$ 为强凸泛函. ▮

命题 2.2 设 $\Phi(Y)$ 由 (2.5) 式定义,则对任取定的 $F=\{f_j\}_{j=1}^3, G=\{g_j\}_{j=1}^3\in\prod_{j=1}^{3}L^2[0,1]$, 变分方程

$$-a_j^2y_j^{(4)}-(\rho_j^2+3\rho_j+1)y_j-M_j\frac{(1+\rho_j)y_j-f_j}{\|(1+\rho_j)y_j-f_j\|_{L^2}}+(1+\rho_j)f_j+g_j=0,\quad j=1,2,3$$

存在唯一解 $Y=\{y_j\}_{j=1}^3\in H_e^2[0,1]$.

证 设 $\Phi(Y)$ 由 (2.5) 式定义. 命题 2.1 和引理 2.3 表明，存在唯一的 $Y^*=\{y_j^*\}_{j=1}^3\in H_e^2[0,1]$ 使得

$$\Phi(Y^*)=\min_{Y\in H_e^2[0,1]}\Phi(Y),$$

从而有 $\nabla\Phi(Y^*)=0$. 下面推导 $\nabla\Phi$ 的表达式.

对任意的 $Z=\{z_j\}_{j=1}^3\in H_e^2[0,1]$ 以及 $s\in\mathbb{R}$, 有

$$\Phi(Y^*+sZ)-\Phi(Y^*)$$
$$=\sum_{j=1}^{3}\frac{a_j^2}{2}[\|(y_j^*+sz_j)''\|_{L^2}^2-\|(y_j^*)''\|_{L^2}^2]+\sum_{j=1}^{3}\frac{\rho_j^2+3\rho_j+1}{2}[\|y_j^*+sz_j\|_{L^2}^2-\|y_j^*\|_{L^2}^2]$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=1}^{3}\frac{M_j}{1+\rho_j}[\|(1+\rho_j)(y_j^*+sz_j)-f_j\|_{L^2}-\|(1+\rho_j)y_j^*-f_j\|_{L^2}]\\
&-\sum_{j=1}^{3}[\langle(1+\rho_j)f_j+g_j,y_j^*+sz_j\rangle_{L^2}-\langle(1+\rho_j)f_j+g_j,y_j^*\rangle_{L^2}]\\
=&\ s\sum_{j=1}^{3}\left[a_j^2\langle(y_j^*)'',z_j''\rangle_{L^2}+(\rho_j^2+3\rho_j+1)\langle y_j^*,z_j\rangle_{L^2}-\langle(1+\rho_j)f_j+g_j,z_j\rangle_{L^2}\right]\\
&+s^2\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{a_j^2}{2}\|z_j''\|_{L^2}^2+\frac{\rho_j^2+3\rho_j+1}{2}\|z_j\|_{L^2}^2\right]\\
&+\sum_{j=1}^{3}\frac{M_j}{1+\rho_j}\frac{\|(1+\rho_j)y_j^*-f_j+(1+\rho_j)sz_j\|_{L^2}^2-\|(1+\rho_j)y_j^*-f_j\|_{L^2}^2}{\|(1+\rho_j)(y_j^*+sz_j)-f_j\|_{L^2}+\|(1+\rho_j)y_j^*-f_j\|_{L^2}}\\
=&\ s\sum_{j=1}^{3}\Bigg[a_j^2\langle(y_j^*)^{(4)},z_j\rangle_{L^2}+(\rho_j^2+3\rho_j+1)\langle y_j^*,z_j\rangle_{L^2}\\
&+\frac{2M_j\langle(1+\rho_j)y_j^*-f_j,z_j\rangle_{L^2}}{\|(1+\rho_j)(y_j^*+sz_j)-f_j\|_{L^2}+\|(1+\rho_j)y_j^*-f_j\|_{L^2}}-\langle(1+\rho_j)f_j+g_j,z_j\rangle_{L^2}\Bigg]\\
&+s^2\sum_{j=1}^{3}\Bigg[\frac{a_j^2}{2}\|z_j''\|_{L^2}^2+\frac{\rho_j^2+3\rho_j+1}{2}\|z_j\|_{L^2}^2\\
&+\frac{M_j(1+\rho_j)\|z_j\|_{L^2}^2}{\|(1+\rho_j)(y_j^*+sz_j)-f_j\|_{L^2}+\|(1+\rho_j)y_j^*-f_j\|_{L^2}}\Bigg],
\end{aligned}
$$

这里我们用到

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3}\langle(y_j^*)'',z_j''\rangle_{L^2}&=\sum_{j=1}^{3}\int_0^1(y_j^*)''(x)z_j''(x)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{j=1}^{3}(y_j^*)''(x)z_j'(x)\Big|_0^1-\sum_{j=1}^{3}\int_0^1(y_j^*)'''(x)z_j'(x)\mathrm{d}x\\
&=-\sum_{j=1}^{3}(y_j^*)'''(x)z_j(x)\Big|_0^1+\sum_{j=1}^{3}\int_0^1(y_j^*)^{(4)}(x)z_j(x)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{j=1}^{3}\langle(y_j^*)^{(4)},z_j\rangle_{L^2}.
\end{aligned}
$$

因此，若 $(1+\rho_j)y_j^*-f_j\neq 0, j=1,2,3,$ 则

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\frac{\Phi(Y^*+sZ)-\Phi(Y^*)}{s}=&\sum_{j=1}^{3}\Bigg[a_j^2\langle(y_j^*)^{(4)},z_j\rangle_{L^2}+(\rho_j^2+3\rho_j+1)\langle y_j^*,z_j\rangle_{L^2}\\
&+M_j\frac{\langle(1+\rho_j)y_j^*-f_j,z_j\rangle_{L^2}}{\|(1+\rho_j)y_j^*-f_j\|_{L^2}}-\langle(1+\rho_j)f_j+g_j,z_j\rangle_{L^2}\Bigg].
\end{aligned}
$$

这表明

$$
\nabla\Phi(Y^*)=\left\{a_j^2(y_j^*)^{(4)}+(\rho_j^2+3\rho_j+1)y_j^*+M_j\frac{(1+\rho_j)y_j^*-f_j}{\|(1+\rho_j)y_j^*-f_j\|_{L^2}}-(1+\rho_j)f_j-g_j\right\}_{j=1}^{3}.
$$

而若 $(1+\rho_j)y_j^*-f_j=0$, 则 $\nabla\Phi(Y^*)$ 应由 $\Phi(Y^*)$ 的次微分替代，如下

$$\left\{a_j^2(y_j^*)^{(4)}+(\rho_j^2+3\rho_j+1)y_j^*-(1+\rho_j)f_j-g_j\right\}_{j=1}^3+B(0,M),$$

其中 $B(0,M)=\{Y=\{y_j\}_{j=1}^3\in H_e^2[0,1]\mid \|y_j\|_{L^2}\le M_j, j=1,2,3\}$. ▮

3 可解性

本节应用单调算子理论证明误差网络 (1.7), 也即方程 (2.3) 的可解性. 为此，只需验证系统算子 $\mathcal{A}$ 满足下面几个命题所示的性质.

命题 3.1 设 $\mathcal{A}$ 由 (2.1)–(2.2) 式定义，则 $-\mathcal{A}$ 是单调算子.

证 对任意的 $(Y,Z)=(\{y_j\}_{j=1}^3,\{z_j\}_{j=1}^3),(F,G)=(\{f_j\}_{j=1}^3,\{g_j\}_{j=1}^3)\in D(\mathcal{A})$, 成立

$$\begin{aligned}
&\langle\mathcal{A}(Y,Z)-\mathcal{A}(F,G),(Y,Z)-(F,G)\rangle_{\mathcal{H}}\\
=&\sum_{j=1}^3\int_0^1 a_j^2(z_j''(x)-g_j''(x)-\rho_j(y_j''(x)-f_j''(x)))(y_j''(x)-f_j''(x))\mathrm{d}x\\
&+\sum_{j=1}^3\int_0^1(-a_j^2(y_j^{(4)}(x)-f_j^{(4)}(x))-\rho_j(y_j(x)-f_j(x))-\rho_j(z_j(x)-g_j(x)))(z_j(x)-g_j(x))\mathrm{d}x\\
&-\sum_{j=1}^3\int_0^1\left(M_j\left(\frac{z_j(x)}{\|z_j\|_{L^2}}-\frac{g_j(x)}{\|g_j\|_{L^2}}\right)\right)(z_j(x)-g_j(x))\mathrm{d}x\\
&+\sum_{j=1}^3\rho_j\int_0^1(z_j(x)-g_j(x)-\rho_j(y_j(x)-f_j(x)))(y_j(x)-f_j(x))\mathrm{d}x\\
=&\sum_{j=1}^3\int_0^1 a_j^2(z_j''(x)-g_j''(x))(y_j''(x)-f_j''(x))\mathrm{d}x\\
&-\sum_{j=1}^3\int_0^1 a_j^2(y_j^{(4)}(x)-f_j^{(4)}(x))(z_j(x)-g_j(x))\mathrm{d}x-\sum_{j=1}^3\int_0^1 a_j^2\rho_j(y_j''(x)-f_j''(x))^2\mathrm{d}x\\
&-\sum_{j=1}^3\int_0^1\rho_j(z_j(x)-g_j(x))^2\mathrm{d}x-\sum_{j=1}^3\int_0^1\rho_j^2(y_j(x)-f_j(x))^2\mathrm{d}x\\
&-\sum_{j=1}^3\int_0^1 M_j\left(\frac{z_j(x)}{\|z_j\|_{L^2}}-\frac{g_j(x)}{\|g_j\|_{L^2}}\right)(z_j(x)-g_j(x))\mathrm{d}x\\
=&-\sum_{j=1}^3 a_j^2\rho_j\|y_j''-f_j''\|_{L^2}^2-\sum_{j=1}^3\rho_j\|z_j-g_j\|_{L^2}^2-\rho_j^2\|y_j-f_j\|_{L^2}^2\\
&-\sum_{j=1}^3 M_j\left[\|z_j\|_{L^2}+\|g_j\|_{L^2}-\frac{1}{\|z_j\|_{L^2}}\int_0^1 z_j(x)g_j(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{\|g_j\|_{L^2}}\int_0^1 z_j(x)g_j(x)\mathrm{d}x\right]\\
\le&-\sum_{j=1}^3[a_j^2\rho_j\|y_j''-f_j''\|_{L^2}^2+\rho_j\|z_j-g_j\|_{L^2}^2+\rho_j^2\|y_j-f_j\|_{L^2}^2]\\
\le&\ 0.
\end{aligned}$$

这表明 $-\mathcal{A}$ 是单调算子. ▮

命题 3.2 设 $\mathcal{A}$ 由 (2.1)–(2.2) 式定义，则值域 $R(I-\mathcal{A})=\mathcal{H}$.

证 对任意的 $(F,G)\in\mathcal{H}$, 考虑如下方程

$$(I-\mathcal{A})(Y,Z)=(F,G), \tag{3.1}$$

也即

$$\begin{cases} y_j - z_j + \rho_j y_j = f_j, \\ z_j + a_j^2 y_j^{(4)} + \rho_j z_j + \rho_j y_j + M_j \dfrac{z_j}{\|z_j\|_{L^2}} = g_j, \\ (Y,Z)\in D(\mathcal{A}). \end{cases}$$

可得 $z_j=(1+\rho_j)y_j-f_j$, 以及

$$-a_j^2 y_j^{(4)} - (\rho_j^2+3\rho_j+1)y_j - M_j\frac{(1+\rho_j)y_j-f_j}{\|(1+\rho_j)y_j-f_j\|_{L^2}} + (1+\rho_j)f_j + g_j = 0, \quad j=1,2,3.$$

根据命题 2.2, 存在唯一的 $Y^*=\{y_j^*\}_{j=1}^3\in H_e^2[0,1]$ 满足上述方程. 因此 $(Y^*,\{(1+\rho_j)y_j^*-f_j\}_{j=1}^3)$ 是方程 (3.1) 的解. 这表明 $R(I-\mathcal{A})=\mathcal{H}$. ∎

在命题 3.1, 3.2, 以及引理 2.3, 2.4 的基础上，可得误差网络 (2.3) 的可解性.

定理 3.1 假设 $M_j=\sup\limits_{t\geq 0}\|d_j(t)\|_{L^2[0,1]}<\infty, j=1,2,3$. 那么对任意的 $Y_0\in D(\mathcal{A})$, 即若初值 Y_0 与系统 (1.7) 的边界条件相容，则误差网络 (2.3), 即系统 (1.7) 存在唯一解.

4 指数稳定性

本节证明跟踪网络 (1.2) 能够按任意速率以指数速度实现对目标系统 (1.1) 的跟踪. 为此，通过构造适当的 Lyapunov 函数，证明误差网络 (1.7) 能够按任意速率指数衰减.

在状态空间 $\mathcal{H}$ 中，考虑泛函 $V(t)$ 如下

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_0^1 [a_j^2|e_{j,xx}(x,t)|^2 + |e_{j,t}(x,t)+\rho_j e_j(x,t)|^2 + \rho_j|e_j(x,t)|^2]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left[a_j^2\|e_{j,xx}(t)\|_{L^2}^2 + \|e_{j,t}(t)+\rho_j e_j(t)\|_{L^2}^2 + \rho_j\|e_j(t)\|_{L^2}^2\right]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} &= \sum_{j=1}^{3}\int_0^1 [a_j^2 e_{j,xx}(x,t)e_{j,xxt}(x,t) + (e_{j,t}(x,t)+\rho_j e_j(x,t)) \\ &\quad \cdot(e_{j,tt}(x,t)+\rho_j e_{j,t}(x,t)) + \rho_j e_j(x,t)e_{j,t}(x,t)]\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=1}^{3}\int_0^1 (\rho_j e_j(x,t) + a_j^2 e_{j,xxxx}(x,t))e_{j,t}(x,t)\mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{j=1}^{3}\int_0^1 (e_{j,t}(x,t)+\rho_j e_j(x,t))(e_{j,tt}(x,t)+\rho_j e_{j,t}(x,t))\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=1}^{3}\int_0^1 [(\rho_j e_j(x,t) + a_j^2 e_{j,xxxx}(x,t)) + (e_{j,tt}(x,t)+\rho_j e_{j,t}(x,t))] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot(e_{j,t}(x,t)+\rho_j e_j(x,t))\mathrm{d}x-\sum_{j=1}^{3}\rho_j\int_0^1(\rho_j e_j(x,t)+a_j^2 e_{j,xxxx}(x,t))e_j(x,t)\mathrm{d}x\\
=&-\sum_{j=1}^{3}\int_0^1(e_{j,t}(x,t)+\rho_j e_j(x,t))(\rho_j e_{j,t}(x,t)+\rho_j^2 e_j(x,t)\\
&+M_j\frac{e_{j,t}(x,t)+\rho_j e_j(x,t)}{\|e_{j,t}(t)+\rho_j e_j(t)\|_{L^2}})\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{3}\int_0^1(e_{j,t}(x,t)+\rho_j e_j(x,t))d_j(x,t)\mathrm{d}x\\
&-\sum_{j=1}^{3}\rho_j^2\|e_j(t)\|_{L^2}^2-\sum_{j=1}^{3}a_j^2\rho_j\int_0^1 e_j(x,t)e_{j,xxxx}(x,t)\mathrm{d}x\\
\le&-\sum_{j=1}^{3}\rho_j\|e_{j,t}(t)+\rho_j e_j(t)\|_{L^2}^2-\sum_{j=1}^{3}M_j\|e_{j,t}(t)+\rho_j e_j(t)\|_{L^2}\\
&+\sum_{j=1}^{3}\|d_j(t)\|_{L^2}\|e_{j,t}(t)+\rho_j e_j(t)\|_{L^2}-\sum_{j=1}^{3}\rho_j^2\|e_j(t)\|_{L^2}^2\\
&-\sum_{j=1}^{3}a_j^2\rho_j\int_0^1 e_{j,xx}^2(x,t)\mathrm{d}x\\
\le&-\sum_{j=1}^{3}\rho_j\|e_{j,t}(t)+\rho_j e_j(t)\|_{L^2}^2-\sum_{j=1}^{3}\rho_j^2\|e_j(t)\|_{L^2}^2-\sum_{j=1}^{3}a_j^2\rho_j\|e_{j,xx}(t)\|_{L^2}^2\\
\le&-2\rho V(t),
\end{aligned}
$$

其中 $\rho=\min\{\rho_1,\rho_2,\rho_3\}$.

因此，我们有

$$
V(t)\le \mathrm{e}^{-2\rho t}V(0).
$$

为比较能量泛函 $E(t)$(见定义 1.8) 与 $V(t)$, 进行如下估计

$$
\begin{aligned}
V(t)=&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_0^1[a_j^2|e_{j,xx}(x,t)|^2+|e_{j,t}(x,t)+\rho_j e_j(x,t)|^2+\rho_j|e_j(x,t)|^2]\mathrm{d}x\\
\le&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_0^1[a_j^2|e_{j,xx}(x,t)|^2+2(|e_{j,t}(x,t)|^2+|\rho_j e_j(x,t)|^2)+\rho_j|e_j(x,t)|^2]\mathrm{d}x\\
\le&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_0^1\left[a_j^2|e_{j,xx}(x,t)|^2+2|e_{j,t}(x,t)|^2+\frac{(2\rho_j^2+\rho_j)a_j^2}{2a_j^2}|e_{j,xx}(x,t)|^2\right]\mathrm{d}x\\
\le&\max\left\{1+\max_{j=1,2,3}\left\{\frac{2\rho_j^2+\rho_j}{2a_j^2}\right\},2\right\}E(t),
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
V(t)=&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_0^1[a_j^2|e_{j,xx}(x,t)|^2+|e_{j,t}(x,t)+\rho_j e_j(x,t)|^2+\rho_j|e_j(x,t)|^2]\mathrm{d}x\\
\ge&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_0^1[a_j^2|e_{j,xx}(x,t)|^2+|e_{j,t}(x,t)|^2+(\rho_j^2+\rho_j)|e_j(x,t)|^2-2\rho_j|e_j(x,t)\|e_{j,t}(x,t)|]\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_0^1 [a_j^2|e_{j,xx}(x,t)|^2 + |e_{j,t}(x,t)|^2]\mathrm{d}x - \frac{\rho_j}{2(\rho_j+1)}\int_0^1 |e_{j,t}(x,t)|^2\mathrm{d}x \\
&\quad + \sum_{j=1}^{3}\frac{(\rho_j^2+\rho_j)}{2}\int_0^1 \left[e_j(x,t) - \frac{e_{j,t}(x,t)}{\rho_j+1}\right]^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_0^1 \left[a_j^2|e_{j,xx}(x,t)|^2 + \frac{1}{\rho_j+1}|e_{j,t}(x,t)|^2\right]\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{3}\frac{\rho_j^2+\rho_j}{2}\left\|e_j(x,t) - \frac{e_{j,t}(x,t)}{\rho_j+1}\right\|_{L^2}^2 \\
&\geq \frac{E(t)}{\max\limits_{j=1,2,3}\{\rho_j\}+1}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\frac{E(t)}{\max\limits_{j=1,2,3}\{\rho_j\}+1} \leq V(t) \leq \max\left\{1 + \max_{j=1,2,3}\left\{\frac{2\rho_j^2+\rho_j}{2a_j^2}\right\}, 2\right\}E(t).
$$

于是

$$
\begin{aligned}
E(t) &\leq (\max_{j=1,2,3}\{\rho_j\}+1)\max\left\{1 + \max_{j=1,2,3}\left\{\frac{(2\rho_j^2+\rho_j)}{2a_j^2}\right\}, 2\right\}\mathrm{e}^{-2\rho t}E(0) \\
&:= C\mathrm{e}^{-2\rho t}E(0),
\end{aligned}
$$

其中 $\rho = \min\limits_{j=1,2,3}\{\rho_j\}$, 且 C 是只与系统参数 ρ_j, a_j, $j=1,2,3$ 有关的常数.

这表明，正如本文第 1 节所述，误差网络 (1.7) 能够按任意速率 $\rho > 0$ 指数衰减.

定理 4.1 假设 $M_j = \sup\limits_{t\geq 0}\|d_j(t)\|_{L^2} < \infty, j=1,2,3$. 则对任意初值 $Y_0 \in D(\mathcal{A})$, 误差网络 (2.3), 即系统 (1.7) 能够按任意速率 $\eta > 0$ 指数衰减. 换言之，跟踪网络 (1.2) 能够按任意速率以指数速度跟踪目标网络 (1.1).

5 小结

本文研究了带有未知内部扰动的星形 Euler-Bernoulli 梁网络的指数跟踪控制，将其等价转化为误差网络的指数镇定，基于 SMC 控制思想设计了控制方案，证明了误差系统的可解性与指数稳定性.

本文提出的控制方案

$$
u_j(x,t) = -2\rho_j e_{j,t}(x,t) - (\rho_j^2+\rho_j)e_j(x,t) - M_j\frac{e_{j,t}(x,t)+\rho_j e_j(x,t)}{\|e_{j,t}(t)+\rho_j e_j(t)\|_{L^2}}
$$

包含两个部分. 前两项是一个部分，与传统的内部反馈类似，用于对不含扰动项 $d_j(x,t)$ 的网络进行指数镇定. 第三项是另一部分，是由 SMC 方法设计的非线性控制项，用于消除扰动引起的不确定性.

最后指出两点.

1) 众所周知，边界控制仅能够对不含扰动的网络做到指数镇定. 由于边界控制比内部 (分布) 控制更切合实际，所以能否 (如何) 将本文控制方案中的前两项替换成边界控制，同时保证指数跟踪的效果，是有意义的研究. 这是作者下一步工作的内容之一.

2) 从具体证明可以看出，本文的 SMC 控制设计方案和指数跟踪结论对由 n 个方程构成的一般星形网络也成立. 即对如下目标网络

$$\begin{cases} w_{j,tt}(x,t)+a_j^2 w_{j,xxxx}(x,t)=d_j(x,t), \quad x\in(0,1), t>0,\\ w_1(0,t)=w_2(0,t)=\cdots=w_n(0,t),\\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2 w_{j,xxx}(0,t)=0,\\ w_{j,xx}(0,t)=0,\\ w_{j,xx}(1,t)=0,\\ w_{j,xxx}(1,t)=0,\\ w_j(x,0)=w_j^0(x), \quad w_{j,t}(x,0)=w_j^1(x), \quad j=1,2,\cdots,n, \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 $d_j(x,t), j=1,2,\cdots,n$ 表示有界扰动，可选择如下跟踪系统

$$\begin{cases} \widetilde{w}_{j,tt}(x,t)+a_j^2 \widetilde{w}_{j,xxxx}(x,t)=0, \quad x\in(0,1), t>0,\\ \widetilde{w}_1(0,t)=\widetilde{w}_2(0,t)=\cdots=\widetilde{w}_n(0,t),\\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2 \widetilde{w}_{j,xxx}(0,t)=0,\\ \widetilde{w}_{j,xx}(0,t)=0,\\ \widetilde{w}_j(1,t)=0,\\ \widetilde{w}_{j,x}(1,t)=0,\\ \widetilde{w}_j(x,0)=\widetilde{w}_j^0(x), \quad \widetilde{w}_{j,t}(x,0)=\widetilde{w}_j^1(x), \quad j=1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{5.2}$$

令 $e_j(x,t)=w_j(x,t)-\widetilde{w}_j(x,t), j=1,2,\cdots,n$ 表示误差，取内部控制为

$$u_j(x,t)=-2\rho_j e_{j,t}(x,t)-(\rho_j^2+\rho_j)e_j(x,t)-M_j\frac{e_{j,t}(x,t)+\rho_j e_j(x,t)}{\|e_{j,t}(t)+\rho_j e_j(t)\|_{L^2}}, \quad j=1,2,\cdots,n, \tag{5.3}$$

其中控制常数 $\rho_j>0$, 且 $M_j=\sup\limits_{t\geq 0}\|d_j(t)\|_{L^2}<\infty$. 则对任意的 $\eta>0$, 只要控制常数满足 $\rho_j>\eta, j=1,2,\cdots,n$, 则误差网络按速率 $\eta>0$ 指数衰减. 这一结论的证明与 $n=3$ 的情形完全类似，本文省略证明细节.

参 考 文 献

[1] Valencia C, Vellasco M, Figueiredo K. Trajectory tracking control using echo state networks for the corobot's arm//Kin J-H, et al. Robot Intelligence Technology and Applications 2, Advances in Intelligent Systems and Computing. Switzerland: Springer Inter Publish, 2014, **274**: 433–447

[2] Kumar N, Panwar V, Sukavanam N, et al. Neural network-based nonlinear tracking control of kinematically redundant robot manipulators. Math Comput Modelling, 2011, **53**(9/10): 1889–1901

[3] Mehrabian A, Tafazoli S, Khorasani K. Cooperative tracking control of Euler-Lagrange systems with switching communication network topologies//2010 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Montréal, Canada: IEEE, 2010: 756–761

[4] Xiong J, Li J. Non-fragile consensus algorithms for a network of diffusion PDEs with boundary local interaction. Internat J Systems Sci, 2017, **48**(9): 1–7

[5] Demetriou M. Synchronization and consensus controllers for a class of parabolic distributed parameter systems. Syst Control Lett, 2013, **62**(1): 70–76

[6] Pilloni A, Pisano A, Orlov Y, et al. Consensus-based control for a network of diffusion PDEs with boundary local interaction. IEEE Trans Autom Control, 2016, **61**(9): 2708–2713

[7] Jadachowski L, Meurer T, Kugi A. Backstepping observers for linear PDEs on higher-dimensional spatial domains. Automatica, 2016, **51**: 85–97

[8] Freudenthaler G, Meurer T. PDE-based tracking control for multi-agent deployment. IFAC-PapersOnLine, 2016,**49**(18): 582–587

[9] Qi J, Vazquez R, Krstic M. Multi-agent deployment in 3-d via PDE control. IEEE Trans Autom Control, 2015, **60**(4): 891–906

[10] Shifmann J. A tracking controller for the Euler-Bernoulli beam//1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Cincinnati, OH: IEEE, 1990, 928–933

[11] Shtessel T, Edwards C, Fridman L. Sliding Mode Control and Observation. Basel: Birkhäuser, 2014

[12] Fu Q, Xu G. Exponential stabilization of 1-d wave equation with distributed disturbance. WSEAS Trans Math, 2015 **14**: 192–201

[13] Tang S, Krstic M. Sliding mode control to the stabilization of a linear 2×2 hyperbolic system with boundary input disturbance//Proceedings of 2014 American Control Conference. Portland, America: IEEE, 2014: 1027–1032

[14] Cheng M, Su W. Boundary stabilization and matched disturbance rejection of hyperbolic PDE systems: a sliding-mode approach//Proceedings of IEEE American Control Conference. Montréal: IEEE, 2012: 5360–5365

[15] Orlov Y, Pilloni A, Pisano A, et al. Consensus-based leader-follower tracking for a network of perturbed diffusion PDEs via local boundary interaction. IFAC-PapersOnLine, 2016, **49**(8): 228–233

[16] 张丽萍，刘东毅，张国山. 带有内部扰动的 Timoshenko 梁系统的指数稳定性. 数学物理学报， 2017, **37A**(1): 185–198
Zhang L, Liu D, Zhang G. Exponential stabilization of a Timoshenko beam system with internal disturbances. Acta Math Sci, 2017, **37A**(1): 185–198

[17] Liu J, Wang J. Boundary stabilization of a cascade of ODE-wave systems subjected to boundary control matched disturbance. Internat. J Robust Linear Control, 2017, **27**: 252–280

[18] Wang J, Liu J, Ren B, et al. Sliding mode control to stabilization of cascaded heat PDE-ODE systems subject to boundary control matched disturbance. Automatica, 2015, **52**: 23–34

[19] Han J. From PID to active disturbance rejection control. IEEE Trans. Industrial Electronics, 2009, **56**(3): 900–906

[20] Guo B, Liu J, AL-Fhaid A, et al. The active disturbance rejection control approach to stabilisation of coupled heat and ODE system subject to boundary control matched disturbance. Internat J Control, 2015, **88**(8): 1554–1564

[21] Guo B, Jin F. Sliding mode and active disturbance rejection control to stabilization of one-dimensional anti-stable wave equations subject to disturbance in boundary input. IEEE Trans Automat Control, 2013, **58**(5): 1269–1274

[22] Guo B, Jin F. The active disturbance rejection and sliding mode control approach to stabilization of the Euler-bernoulli beam equations with boundary input disturbance. Automatica, 2013, **49**(9): 2911–2918

[23] Guo B, Liu J. Sliding mode control and active disturbance rejection control to the stabilization of one-dimensional Schrödinger equation subject to boundary control matched disturbance. Internat J Robust Nonlinear Control, 2014, **24**(16): 2194–2212

[24] Wang J, Guo B. Riesz basis and stabilization for the flexible structure of a symmetric tree-shaped beam network. Math Meth Appl Sci, 2008, **31**: 289–314

[25] Barbu V. Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces. New York: Springer-Verlag, 2010

[26] Polyak B. Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions. Soviet Math Dokl, 1966, **7**(2): 72–75

[27] Merentes N, Nikodem K. Remarks on strongly convex functions. Aequat Math, 2010, **80**: 193–199

[28] Bauschke H, Combettes L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. New York: Springer-Verlag, 2017

Exponential Tracking Control for a Star-Shaped Network of Euler-Bernoulli Beams with Unknown Internal Disturbance

[1]Zhang Yaxuan [2]Xu Genqi [1]Guo Yanni

([1] *Department of Mathematics, College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300;*
[2] *College of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300350*)

Abstract: In this paper, the exponential tracking control for a star-shaped network of Euler-bernoulli beams with unknown internal disturbance is studied. The problem is transformed into the stabilization of the error system between the objective network and the active network. The idea of sliding-mode control is used to design a nonlinear feedback control law. The solvability of the error system is obtained via monotone operator theory under an appropriately chosen space norm. The error system is proved to be exponentially stabilized at any decay rate by a suitable Lyapunov functional. So the objective network can track the active network exponentially at any designated rate.

Key words: Tracking control; Unknown internal disturbance; Star-shaped network of Euler-bernoulli beams; Sliding-mode control; Exponential stabilization.

MR(2010) Subject Classification: 93D15