数学物理学报 Acta Mathematica Scientia
2019,**39A**(3):582–595
http://actams.wipm.ac.cn

分数噪声驱动的随机热方程解的局部时 *

[1] 王志 [2] 闫理坦 [3] 余显烨 **
([1] 宁波工程学院理学院 浙江宁波 315211; [2] 东华大学理学院 上海 201620; [3] 中山大学数学学院 广州 510275)

摘要：该文研究了可加分数噪声驱动的随机热方程解的碰撞局部时和相交局部时. 运用局部非确定性和混沌分解等方法得到它们的存在性和光滑性.

关键词：随机热方程；分数噪声；碰撞局部时；相交局部时；混沌分解.

MR(2010) 主题分类：60H15; 60J55 **中图分类号**：O211.6 **文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2019)03-582-14

1 引言

该文考虑下面的随机热方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u + \dot{W}^H, & t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d, \\ u_{0,x} = 0, & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\dot{W}^H$ 表示零均值高斯随机场 $(W^H(t,x)_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^d})$ 的形式上的导数. 零均值高斯随机场的协方差为

$$E(W^H(t,x)W^H(s,y)) = R_H(s,t)(x\wedge y), \tag{1.2}$$

这里的 $R_H(s,t) = \frac{1}{2}(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H})$ 是分数布朗运动的协方差. 在该文中, 我们总是假设 Hurst 指数 $H\in(\frac{1}{2},1)$. 噪声 $(\dot{W}^H(t,x)_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^d})$ 通常被称为分数白噪声, 这是因为在时间上它的表现是分数布朗运动, 在空间上它的表现是白噪声.

上面的随机热方程解的存在唯一性是 Balan 和 Tudor[1] 证明的. 该文主要研究这个方程解的碰撞局部时和相交局部时的存在性和光滑性, 主要的研究工具是局部非确定性 (参见文献 [2]) 和混沌分解.

收稿日期: 2017-11-02; 修订日期: 2018-11-06
E-mail: wangzhi1006@hotmail.com; litanyan@hotmail.com; xianyeyu@gmail.com
* 基金项目: 国家自然科学基金 (11701304, 11571071, 11701589) 、浙江省自然科学基金 (LQ16A010006) 和中央高校基本科研业务费 (171gpy17)
Supported by the NSFC (11701304, 11571071, 11701589), the Zhejiang Provincial Natural Science Foundation (LQ16A010006) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (171gpy17)
** 通讯作者

当 $H=\frac{1}{2}$ 时，噪声 $(\dot{W}^H(t,x)_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^d})$ 是经典的时空白噪声．众所周知，下面的随机热方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\Delta u+\dot{W}, & t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^d,\\ u_{0,x}=0, & x\in\mathbb{R}^d\end{cases}\tag{1.3}$$

有唯一解当且仅当 $d=1$ (参见文献 [3])．其适度解被定义为

$$u(t,x)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}G(t-s,x-y)W(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y),\quad t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^d,$$

其中 $G(t,x)$ 是热核

$$G(t,x)=\begin{cases}(2\pi t)^{-d/2}\exp(-\dfrac{|x|^2}{2t}), & \text{if } t>0,x\in\mathbb{R}^d,\\ 0, & \text{if } t\leq 0,x\in\mathbb{R}^d.\end{cases}\tag{1.4}$$

显然，过程 $\{u(t,x),t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^d\}$ 是一个中心化的高斯过程．当 $d=1$ 且固定空间变量 x 时，文献 [4] 证明了 $\{u(t,x),t\in[0,T]\}$ 是一个双分数布朗运动．它的协方差为

$$E(u(t,x)u(s,x))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sqrt{t+s}-\sqrt{|t-s|}),$$

其中 $s,t\in[0,T]$. 关于双分数布朗运动，可参见文献 [5–8].

另一方面，高斯过程的局部时引起了众多学者的注意．在文献 [9–10] 中，作者研究了两个独立的分数布朗运动的相交局部时．文献 [11] 研究了平面上的分数布朗运动的自交局部时，而在一般维数情形下，参见文献 [12–14]. 而关于次分数布朗运动和双分数布朗运动的的碰撞局部时，可参见文献 [15–16] 和 [17–18]. 对于研究对象是更一般的高斯随机场，可参见文献 [19].

方程 (1.1) 的解的分布的结构是比时空白噪声情形下的结构复杂得多的．事实上，当固定空间变量时，方程 (1.1) 的解不再是双分数布朗运动．关于解的结构，参见文献 [20]. 文献 [21] 证明了方程 (1.1) 的解作为高斯过程的局部非确定性．文献 [22] 研究了分数彩噪声驱动的随机热方程的解的样本轨道性质．文献 [23] 研究了具有可加分数彩噪声的随机热方程的解的局部时的正则性．受这些结果的启发，该文研究方程 (1.1) 的解的一些相关的局部时．实际上，方程 (1.1) 的适度解为

$$U^H(t,x)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}G(t-s,x-y)W^H(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y),\tag{1.5}$$

其中 G 在 (1.4) 式中给出．由这个表达式，我们知道，当固定空间变量 x 时，过程 $U^H(t,x)$ 是一个 α 自相似的高斯过程 (参见文献 [21]), 其中 $\alpha=H-\frac{1}{4}d$. 其协方差为

$$E\left[U^H(s,x)U^H(t,x)\right]=\alpha_H(4\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_0^t\int_0^s|u-v|^{2H-2}((t+s)-(u+v))^{-\frac{d}{2}}\mathrm{d}v\mathrm{d}u,$$

其中 $s,t\in[0,T]$ 和 $d<4H$. 显然，协方差函数是一个很复杂得函数， $U^H(t,x)$ 是一个特殊且复杂的高斯过程.

我们知道，对于两个连续独立的随机过程 X 和 Y, 它们的碰撞局部时形式上被定义为

$$\int_0^t\delta(X_s-Y_s)\mathrm{d}s,$$

其中 $t \in [0,T]$, $\delta(\cdot)$ 是狄拉克函数．它是度量这两个过程的轨道在时间区间 $[0,t]$ 中碰撞到一起的时间．记 $F_t^H := U^H(t,x)$, 其中 $d < 4H$, 空间变量 $x \in \mathbb{R}^d$ 是固定的．令高斯随机场 $(W^{H_1}(t,x)_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^d})$ 与 $(\widetilde{W}^{H_2}(t,x)_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^d})$ 是独立的，其中 $H_1, H_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$. 假设 U^{H_1} 和 U^{H_2} 分别是方程 (1.1) 在高斯场 W^{H_1} 和 $\widetilde{W}^{H_2}$ 下对应的解．则过程 $F_t^{H_1}$ 与 $F_t^{H_2}$ 是相互独立的．该文的一个主要研究对象就是下面的碰撞局部时

$$\ell_t = \int_0^t \delta(F_s^{H_1} - F_s^{H_2})\mathrm{d}s,$$

其中 $t \in [0,T]$.

该文的结构安排如下：第二节给出分数随机热方程的一些结果和高斯过程的混沌分解；第三节证明碰撞局部时 ℓ_t 在 L^2 意义下是存在性的；第四节给出碰撞局部时 ℓ_t 的光滑性；第五节研究碰撞局部时的正则性．事实上，当 $n \geq 1$ 时，有

$$E(|\ell_t - \ell_s|^n) \leq k(t-s)^{n(1-(H-\frac{d}{4}))},$$

其中 $d < 4H$, $s \leq t$, $s,t \in [0,T]$, $H = H_1 \wedge H_2$．这表明碰撞局部时这个随机过程是 β 阶 Hölder 连续的，其中 $0 < \beta < 1 - (H_1 \wedge H_2 - \frac{d}{4})$. 第六节研究了两个独立的过程 F^H 和 $\tilde{F}^H$ 的相交局部时，其中 Hurst 指数是一样的．这两个过程的相交局部时形式上被定义为

$$I_t(F^H, \tilde{F}^H) = \int_0^t \int_0^t \delta(F_s^H - \tilde{F}_r^H)\mathrm{d}r\mathrm{d}s,$$

其中 $t \in [0,T]$, $\tilde{F}^H$ 是 F^H 的独立复制．

2 准备工作

定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的中心化高斯过程 $W^H = \{W_t^H(A), t \in [0,T], A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)\}$, 其协方差为

$$E(W_t^H(A)W_s^H(B)) = R_H(t,s)\lambda(A\cap B) := \langle 1_{[0,t]\times A}, 1_{[0,s]\times B}\rangle_{\mathcal{H}},$$

其中 λ 是勒贝格测度．记 $W^H(t,x) := W_t^H([0,x]), x \in \mathbb{R}^d$．我们得到高斯场 $\{W^H(t,x), t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d\}$, 其协方差是 (1.2) 式．令 $\mathcal{H}$ 是由示性函数生成的线性空间在内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ 下的完备化空间．映射 $\varphi \in \mathcal{E} \to W^H(\varphi)$ 是 $\mathcal{E}$ 到由 W^H 生成的高斯空间上的一个等距映射，它可以被延拓到 $\mathcal{H}$ 上．记

$$\varphi \mapsto W^H(\varphi) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t,x) W^H(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x),$$

其中积分是关于高斯过程 W^H 的维纳积分．所以分数随机热方程 (1.1) 的适度解可以被写成 (1.5) 式．下面的结果来自于文献 [1].

定理 2.1 过程 $\{U^H(t,x), t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d\}$ 存在且满足 $\sup\limits_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^d} E(U^H(t,x)^2) < \infty$ 当且仅当 $d < 4H$.

这意味着，当 $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ 时，我们可以考虑空间变量的维数是 1 或 2; 当 $H \in (\frac{3}{4}, 1)$ 时，相应的空间变量的维数是 1, 2 或 3. 假定 $s \leq t$, 记 $R^H(t,s) = E(F_t^H F_s^H)$, 则

$$R^H(t,s) = \alpha_H (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_0^t \int_0^s |u-v|^{2H-2}((t+s)-(u+v))^{-\frac{d}{2}}\mathrm{d}v\mathrm{d}u,$$

其中 $\alpha_H = H(2H-1)$. 注意，该文中我们总假设 $d < 4H$ 和 $\frac{1}{2} < H < 1$.

下面我们简单地介绍混沌分解, 它是 $L^2(\Omega, P)$ 上的一个直和分解. 令 $X := \{X_t, t \in [0,T]\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个高斯过程． $p_n(x)$ 是 n 阶多项式，我们称 $p_n(X_t)$ 是关于 X 的多项式函数，其中 $t \in [0,T]$. $\mathcal{P}_n$ 是 $\{p_m(X_t) : 0 \le m \le n, t \in [0,T]\}$ 在 $L^2(\Omega, P)$ 范数下的完备化空间．显然， $\mathcal{P}_n$ 是 $L^2(\Omega, P)$ 的子空间．记 $\mathcal{C}_n$ 是 $\mathcal{P}_n$ 的子空间且与 $\mathcal{P}_{n-1}$ 正交．则 $L^2(\Omega, P)$ 是关于 $\mathcal{C}_n$ 的直和

$$L^2(\Omega, P) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n.$$

也就是说，对于任意的 $F \in L^2(\Omega, P)$, 存在 $F_n \in \mathcal{C}_n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 使得

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \tag{2.1}$$

成立．分解 (2.1) 称为 F 的混沌分解， F_n 称为 F 的 n 阶混沌．于是

$$E(|F|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} E(|F_n^2|). \tag{2.2}$$

考虑 Meyer-Watanabe 试验函数空间 $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} := \left\{ F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \in L^2(\Omega, P) | \sum_{n=0}^{\infty} nE(|F_n|^2) < \infty \right\},$$

$F \in L^2(\Omega, P)$ 是光滑的，如果 $F \in \mathcal{U}$.

当 $F \in L^2(\Omega, P)$ 时，定义算子 Γ_u

$$\Gamma_u F := \sum_{n=0}^{\infty} u^n F_n,$$

其中 $u \in [0,1]$. 令 $\Theta(u) := \Gamma_{\sqrt{u}} F$, 则 $\Theta(1) = F$. 定义 $\Phi_\Theta(u) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\|\Theta(u)\|^2)$. 于是

$$\Phi_\Theta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} n u^{n-1} E(|F_n|^2).$$

注意到 $\|\Theta(u)\|^2 = E(|\Theta(u)|^2) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} E(u^n |F_n|^2)$.

引理 2.1[24] 假设 $F \in L^2(\Omega, P)$. 则 $F \in \mathcal{U}$ 当且仅当 $\Phi_\Theta(1) < \infty$.

3 碰撞局部时的存在性

在本节中，我们研究 F^{H_1} 和 F^{H_2} 的碰撞局部时的存在性．它被定义为

$$\ell_t = \int_0^t \delta(F_s^{H_1} - F_s^{H_2}) \mathrm{d}s, \tag{3.1}$$

其中 $t \in [0,T]$. 注意到 $d < 4H$ 和 $\frac{1}{2} < H < 1$. 我们将证明 ℓ_t 在 L^2 意义下是存在的．利用热核来逼近狄拉克函数

$$p_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\varepsilon\xi^2} \mathrm{d}\xi, \tag{3.2}$$

其中 $\varepsilon>0$. 定义

$$\ell_{\varepsilon,t}=\int_0^t p_\varepsilon(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\varepsilon\xi^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s. \tag{3.3}$$

定理 3.1 假设 $H_i\in(\frac{1}{2},1), d<4H_i,\ i=1,2$. 则当 ε 趋向于 0 时， $\ell_{\varepsilon,t}$ 在 L^2 意义下是收敛的．并且，极限记为 ℓ_t, 即 $\ell_t\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

为了证明这个定理，我们需要一些记号．记 $a\wedge b:=\min\{a,b\}$, 记号 $F\asymp G$ 的含义是

$$c_1F(x)\leq G(x)\leq c_2F(x),$$

其中 c_1 和 c_2 是两个正常数.

证 首先，证明对任意的 $\varepsilon>0$, 有 $\ell_{\varepsilon,t}\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. 根据 (3.3) 式，有

$$\begin{aligned}E(\ell_{\varepsilon,t}^2)&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})+\mathrm{i}\eta(F_r^{H_1}-F_r^{H_2})}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon(\xi^2+\eta^2)}{2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon(\xi^2+\eta^2)}{2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}r\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $\sigma^2=Var(\xi(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})+\eta(F_r^{H_1}-F_r^{H_2}))$.

运用局部非确定性 (参见文献 [21]), 有

$$\begin{aligned}\sigma^2&=Var(\xi(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})+\eta(F_r^{H_1}-F_r^{H_2}))\\&=Var(\xi(F_s^{H_1}-F_r^{H_1})-\xi(F_s^{H_2}-F_r^{H_2})+(\xi+\eta)(F_r^{H_1}-F_r^{H_2}))\\&\geq k[\xi^2(|s-r|^{2H_1-\frac{d}{2}}+|s-r|^{2H_2-\frac{d}{2}})+(\xi+\eta)^2(r^{2H_1-\frac{d}{2}}+r^{2H_2-\frac{d}{2}})],\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $k>0$ 是个常数．注意， k 是一个正的常数，不同的地方它的值可能不一样．在上面的不等式中，我们用到了下面的事实 (参见文献 [25])

$$E|F_t^H-F_s^H|^2\asymp|t-s|^{2H-\frac{d}{2}}. \tag{3.6}$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi^2}\int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon(\xi^2+\eta^2)}{2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\\leq&\int_0^t\int_0^s\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}[\xi^2((s-r)^{2H_1-\frac{d}{2}}+(s-r)^{2H_2-\frac{d}{2}})+(\xi+\eta)^2(r^{2H_1-\frac{d}{2}}+r^{2H_2-\frac{d}{2}})]}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\=&k\int_0^t\int_0^s[((s-r)^{2H_1-\frac{d}{2}}+(s-r)^{2H_2-\frac{d}{2}})(r^{2H_1-\frac{d}{2}}+r^{2H_2-\frac{d}{2}})]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\\leq&k\int_0^t\int_0^s[(s-r)^{2(H_1\wedge H_2)-\frac{d}{2}}r^{2(H_1\wedge H_2)-\frac{d}{2}}]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s<\infty.\end{aligned}$$

所以，对于任意的 $\varepsilon>0$, 有 $E(\ell_{\varepsilon,t}^2)<\infty$.

然后，我们证明 $\{\ell_{\varepsilon,t},\varepsilon>0\}$ 在 $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ 中是柯西列．对任意的 $\varepsilon,\zeta>0$, 有

$$\begin{aligned}E(|\ell_{\varepsilon,t}-\ell_{\zeta,t}|^2)=&\frac{1}{4\pi^2}\int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})+\mathrm{i}\eta(F_r^{H_1}-F_r^{H_2})}\\&\cdot(\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^2}-\mathrm{e}^{-\frac{\zeta}{2}\xi^2})(\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^2}-\mathrm{e}^{-\frac{\zeta}{2}\eta^2})\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\=&\frac{1}{4\pi^2}\int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\wedge\zeta}{2}(\xi^2+\eta^2)}\\&\cdot\left(1-\mathrm{e}^{\frac{|\varepsilon-\zeta|}{2}\xi^2}\right)\left(1-\mathrm{e}^{\frac{|\varepsilon-\zeta|}{2}\eta^2}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}r\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

根据控制收敛定理，当 $\varepsilon\to 0$ 和 $\zeta\to 0$ 时，有 $E(|\ell_{\varepsilon,t}-\ell_{\zeta,t}|^2)\to 0$. 这意味着 $\{\ell_{\varepsilon,t},\varepsilon>0\}$ 在 $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ 中是柯西列．所以，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ell_{\varepsilon,t}$ 在 $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ 中是存在的．证毕．

4 碰撞局部时的光滑性

在本节中，我们研究碰撞局部时的光滑性．记

$$\lambda_s := Var(F_s^{H_1}-F_s^{H_2}) \asymp s^{2H_1-\frac{d}{2}}+s^{2H_2-\frac{d}{2}},$$

$$\lambda_r := Var(F_r^{H_1}-F_r^{H_2}) \asymp r^{2H_1-\frac{d}{2}}+r^{2H_2-\frac{d}{2}}$$

和

$$\rho_{r,s} := E((F_s^{H_1}-F_s^{H_2})(F_r^{H_1}-F_r^{H_2})) = R^{H_1}(s,r)+R^{H_2}(s,r).$$

令 $H_n(x)$, $x\in\mathbb{R}$ 是 n 阶 Hermite 多项式，即

$$H_n(x)=(-1)^n\frac{1}{n!}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{4.1}$$

于是

$$\mathrm{e}^{tx-\frac{t^2}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^nH_n(x), \tag{4.2}$$

其中 $t>0$ 和 $x\in\mathbb{R}$. 这意味着

$$\exp(\mathrm{i}u\xi(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})+\frac{1}{2}u^2\xi^2Var(F_s^{H_1}-F_s^{H_2}))=\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{i}u)^n\sigma^n(s,\xi)H_n\left(\frac{\xi(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})}{\sigma(s,\xi)}\right), \tag{4.3}$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 和

$$\sigma(s,\xi)=\sqrt{Var(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})\xi^2}\asymp\sqrt{s^{2H_1-\frac{d}{2}}+s^{2H_2-\frac{d}{2}}}|\xi|,$$

其中 $\xi\in\mathbb{R}$. 由于 $\{H_n(x),x\in\mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 的正交性，根据 (2.1) 式，容易验证

$$(\mathrm{i}u)^n\sigma^n(s,\xi)H_n\left(\frac{\xi(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})}{\sigma(s,\xi)}\right)$$

是 $\exp(\mathrm{i}u\xi(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})+\frac{1}{2}u^2\xi^2Var(F_s^{H_1}-F_s^{H_2}))$ 的 n 阶混沌，其中 $s\in[0,T]$. 下面我们给出命题 4.1, 这个命题是为了帮助证明定理 4.1 的．

命题 4.1 假设 $\frac{1}{2}<H_i<1$ 和 $d<4H_i$, 其中 $i=1,2$, λ_s,λ_r 和 $\rho_{r,s}$ 的定义如上．则 $\ell_t\in\mathcal{U}$ 当且仅当

$$\int_0^t\int_0^t\frac{\rho_{r,s}^2}{(\lambda_s\lambda_r-\rho_{r,s}^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s<\infty, \tag{4.4}$$

其中 $t\in[0,T]$.

证 对任意的 $\varepsilon>0$ 和 $t\in[0,T]$, 有

$$\Theta_\varepsilon(u,t,\ell_{\varepsilon,t}):=E(|\Gamma_{\sqrt{u}}\ell_{\varepsilon,t}|^2)\quad 和\quad \Theta(u,t,\ell_t):=E(|\Gamma_{\sqrt{u}}\ell_t|^2).$$

根据引理 2.1, (4.4) 式成立当且仅当 $\Phi_\Theta(1)<\infty$. 由于 (4.3) 式，所以

$$\begin{aligned}\ell_{\varepsilon,t}&=\int_0^t p_\varepsilon(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\varepsilon\xi^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\lambda_s+\varepsilon)\xi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^n\sigma^n(s,\xi)H_n\left(\frac{\xi(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})}{\sigma(s,\xi)}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\&\equiv\sum_{n=0}^{\infty}F_n.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\Phi_{\Theta_\varepsilon}(1)&=\sum_{n=0}^{\infty}nE(|F_n|^2)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{4\pi^2}E\bigg[\int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\varepsilon(\xi^2+\eta^2)}\sigma^n(s,\xi)\sigma^n(r,\eta)\\&\quad\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\lambda_s\xi^2+\lambda_r\eta^2)}H_n\left(\frac{\xi(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})}{\sigma(s,\xi)}\right)H_n\left(\frac{\eta(F_r^{H_1}-F_r^{H_2})}{\sigma(r,\eta)}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}r\mathrm{d}s\bigg]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4\pi^2(n-1)!}\int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\rho_{r,s}^n(\xi\eta)^n\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\lambda_s+\varepsilon)\xi^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\lambda_r+\varepsilon)\eta^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4\pi^2(2n-1)!}\int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\rho_{r,s}^{2n}(\xi\eta)^{2n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\lambda_s+\varepsilon)\xi^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\lambda_r+\varepsilon)\eta^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}r\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

这里我们用到了下面的事实 (参见文献 [24])

$$E[H_n(X)H_m(Y)]=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{1}{n!}[E(XY)]^n, & m=n,\end{cases}$$

其中随机变量 X,Y 服从联合高斯分布且满足 $E(X)=E(Y)=0$ 和 $E(X^2)=E(Y^2)=1$. 结合

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\xi^{2n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2(\lambda_s+\varepsilon)}\mathrm{d}\xi&=2\int_0^\infty\xi^{2n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2(\lambda_s+\varepsilon)}\mathrm{d}\xi\\&=2^{n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)(\lambda_s+\varepsilon)^{-(n+\frac{1}{2})},\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon>0$ 和 $n\geq1$, 有

$$\begin{aligned}\Phi_{\Theta_\varepsilon}(1)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\Gamma(n+\frac{1}{2}))^2 2^{2n+1}}{4\pi^2(2n-2)!}\int_0^t\int_0^t\frac{\rho_{r,s}^{2n}}{((\lambda_s+\varepsilon)(\lambda_r+\varepsilon))^{n+\frac{1}{2}}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\int_0^t\int_0^t\frac{\rho_{r,s}^{2n}}{((\lambda_s+\varepsilon)(\lambda_r+\varepsilon))^{n+\frac{1}{2}}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

根据二项式定理

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}x^n=\frac{x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}\quad x\in(-1,1),$$

所以

$$\Phi_{\Theta_\varepsilon}(1)=\int_0^t\int_0^t\frac{\rho_{r,s}^2}{((\lambda_s+\varepsilon)(\lambda_r+\varepsilon)-\rho_{r,s}^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s.$$

这意味着，对任意的 $t\in[0,T]$, 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_{\Theta_\varepsilon}(1)=\int_0^t\int_0^t\frac{\rho_{r,s}^2}{(\lambda_s\lambda_r-\rho_{r,s}^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s.$$

证毕. ∎

定理 4.1 ℓ_t 是两个独立过程 F^{H_1} 和 F^{H_2} 的碰撞局部时，其中 $H_i\in(\frac{1}{2},1), i=1,2$. 当

$$\frac{1}{4}d<\min\{H_1,H_2\}<\frac{4+3d}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}d,$$

则对任意的 $t\in[0,T]$, 有 $\ell_t\in\mathcal{U}$.

证 根据命题 4.1, 只需证明当 $\min\{H_1,H_2\}<\frac{4+3d}{12}$ 时，(4.4) 式是成立的. 显然，有

$$\begin{aligned}Var(\xi(F_s^{H_1}-F_s^{H_2})+\eta(F_r^{H_1}-F_r^{H_2}))&=Var((\xi F_s^{H_1}+\eta F_r^{H_1})-(\xi F_s^{H_2}+\eta F_r^{H_2}))\\&\geq Var(\xi F_s^H+\eta F_r^H),\end{aligned}\tag{4.5}$$

其中 $\xi,\eta\in\mathbb{R}$ 和 $H=H_1\wedge H_2$. 则 $4H>d$. 类似于 (3.5) 式，有

$$\begin{aligned}Var(\xi F_s^H+\eta F_r^H)&=Var(\xi(F_s^H-F_r^H)+(\xi+\eta)F_r^H)\\&\geq k(\xi^2(s-r)^{2H-\frac{d}{2}}+(\xi+\eta)^2r^{2H-\frac{d}{2}}),\end{aligned}\tag{4.6}$$

其中 $r<s$. 对任意的 $\xi,\eta\in\mathbb{R}$, (4.5) 和 (4.6) 式意味着

$$\lambda_s\xi^2+2\rho_{r,s}\xi\eta+\lambda_r\eta^2\geq k(\xi^2(s-r)^{2H-\frac{d}{2}}+(\xi+\eta)^2r^{2H-\frac{d}{2}}).$$

化简得

$$(\lambda_s-k(s-r)^{2H-\frac{d}{2}}-kr^{2H-\frac{d}{2}})\xi^2+2(\rho_{r,s}-kr^{2H-\frac{d}{2}})\xi\eta+(\lambda_r-kr^{2H-\frac{d}{2}})\eta^2\geq 0.\tag{4.7}$$

(4.7) 式的判别式满足

$$\Delta=4(\rho_{r,s}-kr^{2H-\frac{d}{2}})^2-4(\lambda_s-k(s-r)^{2H-\frac{d}{2}}-kr^{2H-\frac{d}{2}})(\lambda_r-kr^{2H-\frac{d}{2}})\leq 0,$$

这意味着

$$\begin{aligned}\lambda_s\lambda_r-\rho_{r,s}^2\geq{}& k\lambda_r((s-r)^{2H-\frac{d}{2}}+r^{2H-\frac{d}{2}})+k\lambda_sr^{2H-\frac{d}{2}}-2k\rho_{r,s}r^{2H-\frac{d}{2}}\\&-k^2(s-r)^{2H-\frac{d}{2}}r^{2H-\frac{d}{2}}.\end{aligned}$$

结合

$$|\rho_{r,s}|\leq\sqrt{\lambda_s\lambda_r}\leq\frac{1}{2}(\lambda_s+\lambda_r)\quad 和\quad \lambda_r\asymp r^{2H_1-\frac{d}{2}}+r^{2H_2-\frac{d}{2}}\geq r^{2H-\frac{d}{2}},$$

有

$$\begin{aligned}\lambda_s\lambda_r-\rho_{r,s}^2\geq{}& k\lambda_r((s-r)^{2H-\frac{d}{2}}+r^{2H-\frac{d}{2}})+k\lambda_sr^{2H-\frac{d}{2}}-k(\lambda_s+\lambda_r)r^{2H-\frac{d}{2}}\\&-k^2(s-r)^{2H-\frac{d}{2}}r^{2H-\frac{d}{2}}\\\geq{}& k(s-r)^{2H-\frac{d}{2}}r^{2H-\frac{d}{2}},\end{aligned}$$

其中 k 充分小. 因此, 当 $H < \frac{4+3d}{12}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_0^t \frac{\rho_{r,s}^2}{(\lambda_s\lambda_r-\rho_{r,s}^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
\le &\int_0^t\int_0^t \frac{\lambda_s\lambda_r}{(\lambda_s\lambda_r-\rho_{r,s}^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
\le &k\int_0^t\int_0^t \frac{(s^{2H_1-\frac{d}{2}}+s^{2H_2-\frac{d}{2}})(r^{2H_1-\frac{d}{2}}+r^{2H_2-\frac{d}{2}})}{((s-r)^{2H-\frac{d}{2}}r^{2H-\frac{d}{2}})^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
\le &k(t^{2H_1-\frac{d}{2}}+t^{2H_2-\frac{d}{2}})^2\int_0^t\int_0^t (s-r)^{-3(H-\frac{d}{4})}r^{-3(H-\frac{d}{4})}\mathrm{d}r\mathrm{d}s<\infty,
\end{aligned}$$

其中 $t\in[0,T]$. 证毕. ▌

5 碰撞局部时的正则性

本节我们考虑两个独立的过程 F^{H_1} 和 F^{H_2} 的碰撞局部时的正则性. 结果如下:

定理 5.1 ℓ_t 是两个独立过程 F^{H_1} 和 F^{H_2} 的碰撞局部时, 其中 $H_i\in(\frac{1}{2},1), d<4H_i$, $i=1,2$. 对于任意的正整数 $n\ge 1$, 存在一个依赖于 H_1,H_2 和 n 的正常数, 使得

$$E(|\ell_t-\ell_s|^n)\le k(t-s)^{n(1-(H-\frac{d}{4}))}$$

成立, 其中 $s\le t$, $s,t\in[0,T]$, $H=H_1\wedge H_2$.

证 对于 $0\le s\le t\le T$, 根据 (3.1) 和 (3.3) 式, 有

$$\begin{aligned}
E(|\ell_{\varepsilon,t}-\ell_{\varepsilon,s}|^n)&=E\left(\int_s^t p_\varepsilon(F_u^{H_1}-F_u^{H_2})\mathrm{d}u\right)^n\\
&=E\left(\frac{1}{2\pi}\int_s^t\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(F_u^{H_1}-F_u^{H_2})}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\varepsilon\xi^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}u\right)^n\\
&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{[s,t]^n}\int_{\mathbb{R}^n} E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\limits_{j=1}^n\xi_j(F_{u_j}^{H_1}-F_{u_j}^{H_2})}\right)\mathrm{e}_1^{-\varepsilon\sum\limits_{j=1}^n\xi_j^2}\cdots\mathrm{d}\xi_n\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\
&\le\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{[s,t]^n}\int_{\mathbb{R}^n} E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\limits_{j=1}^n\xi_j(F_{u_j}^{H_1}-F_{u_j}^{H_2})}\right)\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_n\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\
&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{[s,t]^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\langle\xi,A\xi\rangle}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\
&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{[s,t]^n}(\mathrm{det}A)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n,
\end{aligned}$$

其中 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, A 是高斯向量 $(F_{u_1}^{H_1}-F_{u_1}^{H_2},F_{u_2}^{H_1}-F_{u_2}^{H_2},\cdots,F_{u_n}^{H_1}-F_{u_n}^{H_2})$ 的协方差矩阵. 上面最后一个等式是因为下面这个事实

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\langle\xi,A\xi\rangle}\mathrm{d}\xi=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\det A)^{1/2}},$$

其中 A 是一个正定矩阵．另一方面，根据局部非确定性，有

$$\det A \geq k\prod_{j=1}^{n}\left((u_j-u_{j-1})^{2H_1-\frac{d}{2}}+(u_j-u_{j-1})^{2H_2-\frac{d}{2}}\right),$$

其中 $0=u_0<u_1<u_2<\cdots<u_n\leq t$. 因此

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{[s,t]^n}(\det A)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\
&=\frac{n!}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathcal{T}}(\det A)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\
&\leq k\int_{\mathcal{T}}((u_j-u_{j-1})^{2H_1-\frac{d}{2}}+(u_j-u_{j-1})^{2H_2-\frac{d}{2}})^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\
&\leq k\int_{\mathcal{T}}\prod_{j=1}^{n}((u_j-u_{j-1})^{2H-\frac{d}{2}})^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\
&\leq k(t-s)^{n(1-(H-\frac{d}{4}))},
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{T}:=\{s\leq u_1\leq\cdots\leq u_n\leq t\}$, $H=H_1\wedge H_2>\frac{1}{4}d$. 正常数 k 依赖于 H_1,H_2 和 n. 由 Fatou 引理可得

$$E(|\ell_t-\ell_s|^n)\leq\liminf_{\varepsilon\to 0}E(|\ell_{\varepsilon,t}-\ell_{\varepsilon,s}|^n)\leq k(t-s)^{n(1-(H-\frac{d}{4}))}.$$

证毕. ∎

注 5.1 由上面的定理和柯尔莫哥洛夫连续性准则，我们知道过程 $\{\ell_t,t\in[0,T]\}$ 具有连续版本．它的轨道是 β 阶 Hölder 连续的，其中 $0<\beta<1-(H_1\wedge H_2-\frac{d}{4})$.

6 相交局部时的光滑性

在本节中，我们考虑两个 Hurst 指数相同的独立过程 F^H 与 $\tilde{F}^H$ 的相交局部时，主要研究它的光滑性．这两个 F^H 和 $\tilde{F}^H$ 过程的相交局部时被定义为

$$I_t(F^H,\tilde{F}^H)=\int_0^t\int_0^t\delta(F_s^H-\tilde{F}_r^H)\mathrm{d}r\mathrm{d}s,\quad t\in[0,T], \tag{6.1}$$

其中 $\delta(\cdot)$ 是狄拉克函数．定义

$$\begin{aligned}
I_{\varepsilon,t}(F^H,\tilde{F}^H)&=\int_0^t\int_0^t p_\varepsilon(F_s^H-\tilde{F}_r^H)\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{i\xi(F_s^H-\tilde{F}_r^H)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\varepsilon\xi^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}r\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{6.2}$$

其中 $\varepsilon>0$. 类似于定理 的证明，我们很容易得到 $I_t(F^H,\tilde{F}^H)$ 在 L^2 意义下是存在的．下面我们研究其光滑性．记

$$\lambda_{r,s}:=Var(F_s^H-\tilde{F}_r^H)\asymp s^{2H-\frac{d}{2}}+r^{2H-\frac{d}{2}},$$

$$\lambda_{r',s'}:=Var(F_{s'}^H-\tilde{F}_{r'}^H)\asymp s'^{2H-\frac{d}{2}}+r'^{2H-\frac{d}{2}}$$

和

$$\mu=\mu(r,s,r',s')=:E((F_s^H-\tilde F_r^H)(F_{s'}^H-\tilde F_{r'}^H)).$$

下面我们给出 $I_t(F^H,\tilde F^H)\in\mathcal U$ 的充要条件，这对于定理 6.1 的证明是很重要的.

命题 6.1 $\lambda_{r,s},\lambda_{r',s'}$ 和 μ 的定义如上. 则 $I_t(F^H,\tilde F^H)\in\mathcal U$ 当且仅当

$$\int_0^t\int_0^t\int_0^t\int_0^t\frac{\mu^2}{(\lambda_{r,s}\lambda_{r',s'}-\mu^2)^{\frac32}}\mathrm dr\mathrm ds\mathrm dr'\mathrm ds'<\infty,\tag{6.3}$$

其中 $t\in[0,T]$.

证 命题的证明类似于命题 4.1 的证明. 对于 $\varepsilon>0$ 和 $t\in[0,T]$, 记

$$\Theta_\varepsilon(u,t,I_{\varepsilon,t}(F^H,\tilde F^H)):=E(|\Gamma_{\sqrt u}I_{\varepsilon,t}(F^H,\tilde F^H)|^2)$$

和

$$\Theta(u,t,I_t(F^H,\tilde F^H)):=E(|\Gamma_{\sqrt u}I_t(F^H,\tilde F^H)|^2).$$

根据引理 2.1, (6.3) 式成立当且仅当 $\Phi_\Theta(1)<\infty$. 显然，有

$$\begin{aligned}I_{\varepsilon,t}(F^H,\tilde F^H)&=\int_0^t\int_0^t p_\varepsilon(F_s^H-\tilde F_r^H)\mathrm dr\mathrm ds\\&=\frac1{2\pi}\int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb R}\mathrm e^{\mathrm i\xi(F_s^H-\tilde F_r^H)}\mathrm e^{-\frac12\varepsilon\xi^2}\mathrm d\xi\mathrm dr\mathrm ds\\&=\frac1{2\pi}\int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb R}\mathrm e^{-\frac12(Var(F_s^H-\tilde F_r^H)+\varepsilon)\xi^2}\sum_{n=0}^\infty\mathrm i^n\sigma^n(r,s,\xi)H_n\left(\frac{\xi(F_s^H-\tilde F_r^H)}{\sigma(r,s,\xi)}\right)\mathrm d\xi\mathrm dr\mathrm ds\\&\equiv\sum_{n=0}^\infty F_n,\end{aligned}$$

其中 $\sqrt{-1}=\mathrm i$ 和 $\sigma(r,s,\xi)=\sqrt{Var(F_s^H-\tilde F_r^H)\xi^2}$. 于是

$$\begin{aligned}\Phi_{\Theta_\varepsilon}(1)&=\sum_{n=0}^\infty nE(|F_n|^2)\\&=\sum_{n=0}^\infty\frac{n}{4\pi^2}E\bigg[\int_{[0,t]^4}\int_{\mathbb R^2}\mathrm e^{-\frac12(Var(F_s^H-\tilde F_r^H)\xi^2+(Var(F_{s'}^H-\tilde F_{r'}^H)\eta^2)}\sigma^n(r,s,\xi)\sigma^n(r',s',\eta)\\&\quad\cdot\mathrm e^{-\frac12\varepsilon(\xi^2+\eta^2)}H_n\left(\frac{\xi(Var(F_s^H-\tilde F_r^H))}{\sigma(r,s,\xi)}\right)H_n\left(\frac{\eta(Var(F_{s'}^H-\tilde F_{r'}^H))}{\sigma(r',s',\eta)}\right)\mathrm d\xi\mathrm d\eta\mathrm dr\mathrm ds\mathrm dr'\mathrm ds'\bigg]\\&=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{4\pi^2(n-1)!}\int_{[0,t]^4}\int_{\mathbb R^2}\mu^n(\xi\eta)^n\mathrm e^{-\frac12(\lambda_{r,s}+\varepsilon)\xi^2}\mathrm e^{-\frac12(\lambda_{r',s'}+\varepsilon)\eta^2}\mathrm d\xi\mathrm d\eta\mathrm dr\mathrm ds\mathrm dr'\mathrm ds'\\&=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{4\pi^2(2n-1)!}\int_{[0,t]^4}\int_{\mathbb R^2}\mu^{2n}(\xi\eta)^{2n}\mathrm e^{-\frac12(\lambda_{r,s}+\varepsilon)\xi^2}\mathrm e^{-\frac12(\lambda_{r',s'}+\varepsilon)\eta^2}\mathrm d\xi\mathrm d\eta\mathrm dr\mathrm ds\mathrm dr'\mathrm ds',\end{aligned}$$

其中 $t\in[0,T]$. 结合

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb R}\xi^{2n}\mathrm e^{-\frac12\xi^2(\lambda_{r,s}+\varepsilon)}\mathrm d\xi&=2\int_0^\infty\xi^{2n}\mathrm e^{-\frac12\xi^2(\lambda_{r,s}+\varepsilon)}\mathrm d\xi\\&=2^{n+\frac12}\Gamma\left(n+\frac12\right)(\lambda_{r,s}+\varepsilon)^{-(n+\frac12)},\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon>0$, 容易得

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\Theta_\varepsilon}(1)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\Gamma(n+\frac{1}{2}))^2 2^{2n+1}}{4\pi^2(2n-2)!}\int_{[0,t]^4}\frac{\mu^{2n}}{((\lambda_{r,s}+\varepsilon)(\lambda_{r',s'}+\varepsilon))^{n+\frac{1}{2}}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\mathrm{d}r'\mathrm{d}s'\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((2n-1)!!)^2 2^{2n+1}}{4\pi(2n-1)!2^{2n}}\int_{[0,t]^4}\frac{\mu^{2n}}{((\lambda_{r,s}+\varepsilon)(\lambda_{r',s'}+\varepsilon))^{n+\frac{1}{2}}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\mathrm{d}r'\mathrm{d}s'\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\int_{[0,t]^4}\frac{\mu^{2n}}{((\lambda_{r,s}+\varepsilon)(\lambda_{r',s'}+\varepsilon))^{n+\frac{1}{2}}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\mathrm{d}r'\mathrm{d}s'\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{[0,t]^4}\frac{\mu^2}{((\lambda_{r,s}+\varepsilon)(\lambda_{r',s'}+\varepsilon)-\mu^2)^{3/2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\mathrm{d}r'\mathrm{d}s'.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_{\Theta_\varepsilon}(1)=\int_0^t\int_0^t\int_0^t\int_0^t\frac{\mu^2}{(\lambda_{r,s}\lambda_{r',s'}-\mu^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\mathrm{d}r'\mathrm{d}s',
$$

其中 $t\in[0,T]$. 证毕. ▍

定理 6.1 $I_t(F^H,\tilde{F}^H)$ 是两个独立过程 F^H 和 $\tilde{F}^H$ 的相交局部时，其中 $H\in(\frac{1}{2},1)$. 当

$$
\frac{1}{4}d<H<\frac{8+3d}{12}=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}d,
$$

则对任意的 $t\in[0,T]$, 有 $I_t(F^H,\tilde{F}^H)\in\mathcal{U}$.

证 根据命题 6.1, 只需证明当 $H<\frac{8+3d}{12}$ 时， (6.3) 式是成立的. 因此，只要证明对任意的 $t\in[0,T]$ 和 $j=1,2,3$ 时，下式成立

$$
\int_{\mathcal{T}_j}\frac{\mu^2}{(\lambda_{r,s}\lambda_{r',s'}-\mu^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\mathrm{d}r'\mathrm{d}s'<\infty, \tag{6.4}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_1&=\{0<r'<r<s'<s<t\},\\
\mathcal{T}_2&=\{0<r'<s'<r<s<t\},\\
\mathcal{T}_3&=\{0<r<r'<s'<s<t\}.
\end{aligned}
$$

当 $(r,s,r',s')\in\mathcal{T}_1$ 或 $\mathcal{T}_2$ 时，运用局部非确定性可得

$$
\begin{aligned}
&Var(\xi(F_s^H-\tilde{F}_r^H)+\eta(F_{s'}^H-\tilde{F}_{r'}^H))\\
&=Var(\xi(F_s^H-F_{s'}^H)-\xi(\tilde{F}_r^H-\tilde{F}_{r'}^H)+(\xi+\eta)(F_{s'}^H-\tilde{F}_{r'}^H))\\
&\geq k[\xi^2((s-s')^{2H-\frac{d}{2}}+(r-r')^{2H-\frac{d}{2}})+(\xi+\eta)^2(s'^{2H-\frac{d}{2}}+r'^{2H-\frac{d}{2}})],
\end{aligned}\tag{6.5}
$$

其中 $\xi,\eta\in\mathbb{R}$. 另一方面

$$
Var(\xi(F_s^H-\tilde{F}_r^H)+\eta(F_{s'}^H-\tilde{F}_{r'}^H))=\lambda_{r,s}\xi^2+2\mu\xi\eta+\lambda_{r',s'}\eta^2. \tag{6.6}
$$

由 (6.5) 和 (6.6) 式可得

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_{r,s}-k(s-s')^{2H-\frac{d}{2}}-k(r-r')^{2H-\frac{d}{2}}-ks'^{2H-\frac{d}{2}}-kr'^{2H-\frac{d}{2}})\xi^2\\
&+2(\mu-ks'^{2H-\frac{d}{2}}-kr'^{2H-\frac{d}{2}})\xi\eta+(\lambda_{r',s'}-ks'^{2H-\frac{d}{2}}-kr'^{2H-\frac{d}{2}})\eta^2\geq 0.
\end{aligned}
$$

因此

$$\begin{aligned}\Delta = &4(\mu - ks'^{2H-\frac{d}{2}} - kr'^{2H-\frac{d}{2}})^2 \\ &-4(\lambda_{r,s} - k(s-s')^{2H-\frac{d}{2}} - k(r-r')^{2H-\frac{d}{2}} - ks'^{2H-\frac{d}{2}} - kr'^{2H-\frac{d}{2}}) \\ &(\lambda_{r',s'} - ks'^{2H-\frac{d}{2}} - kr'^{2H-\frac{d}{2}}) \le 0,\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\lambda_{r,s}\lambda_{r',s'} - \mu^2 \ge\ & k(\lambda_{r,s} + \lambda_{r',s'} - 2\mu)s'^{2H-\frac{d}{2}} + k(\lambda_{r,s} + \lambda_{r',s'} - 2\mu)r'^{2H-\frac{d}{2}} \\ &+k\lambda_{r',s'}(s-s')^{2H-\frac{d}{2}} + k\lambda_{r',s'}(r-r')^{2H-\frac{d}{2}} \\ &-k^2(s'^{2H-\frac{d}{2}} + r'^{2H-\frac{d}{2}})(s-s')^{2H-\frac{d}{2}} - k^2(s'^{2H-\frac{d}{2}} + r'^{2H-\frac{d}{2}})(r-r')^{2H-\frac{d}{2}}.\end{aligned}$$

结合

$$|\mu| \le \sqrt{\lambda_{r,s}\lambda_{r',s'}} \le \frac{1}{2}(\lambda_{r,s} + \lambda_{r',s'}),$$

有

$$\lambda_{r,s}\lambda_{r',s'} - \mu^2 \ge k\lambda_{r',s'}((s-s')^{2H-\frac{d}{2}} + (r-r')^{2H-\frac{d}{2}}),$$

其中这里的 k 充分小．所以当 $H < \frac{8+3d}{12}$ 时，有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{T}_j} \frac{\mu^2}{(\lambda_{r,s}\lambda_{r',s'} - \mu^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}r\mathrm{d}s\mathrm{d}r'\mathrm{d}s' \\ &\le k\int_{\mathcal{T}_j} \frac{\lambda_{r,s}\lambda_{r',s'}}{[\lambda_{r',s'}((s-s')^{2H-\frac{d}{2}} + (r-r')^{2H-\frac{d}{2}})]^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}r\mathrm{d}s\mathrm{d}r'\mathrm{d}s' \\ &\le kt^{2H-\frac{d}{2}} \int_{\mathcal{T}_j} \frac{1}{(s'^{2H-\frac{d}{2}} + r'^{2H-\frac{d}{2}})^{\frac{1}{2}}(((s-s')^{2H-\frac{d}{2}} + (r-r')^{2H-\frac{d}{2}}))^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}r\mathrm{d}s\mathrm{d}r'\mathrm{d}s' \\ &\le kt^{2H-\frac{d}{2}} \int_{\mathcal{T}_j} \frac{1}{s'^{\frac{1}{2}(H-\frac{d}{4})}r'^{\frac{1}{2}(H-\frac{d}{4})}(s-s')^{\frac{3}{2}(H-\frac{d}{4})}(r-r')^{\frac{3}{2}(H-\frac{d}{4})}} \mathrm{d}r\mathrm{d}s\mathrm{d}r'\mathrm{d}s' < \infty,\end{aligned}$$

其中 $j = 1$ 或 2.

类似地，我们可以处理 $j = 3$ 的情形．证毕. ∎

参 考 文 献

[1] Balan R, Tudor C A. The stochastic heat equation with a fractional-colored noise: existence of the solution. ALEA Lat Am J Probab Math Stat, 2008, **4:** 57–87

[2] Berman S M. Local nondeterminism and local times of Gaussian processes. Indiana Univ Math J, 1973, **23:** 69–94

[3] Dalang R C. Extending martingale measure stochastic integral with application to spatially homogeneous s.p.d.e.'s. Electron J Probab, 1999, **4:** 1–29

[4] Swanson J. Variations of the solution to a stochastic heat equation. Ann Probab, 2007, **35:** 2122–2159

[5] Houdré C, Villa J. An example of infinite dimensional quasi-helix. Comtemp Math, 2003, **336:** 195–202

[6] Russo F, Tudor C A. On the bifractional Brownian motion. Stochastic Process Appl, 2006, **5:** 830–856

[7] Tudor C A, Xiao Y. Sample path properties of bifractional Brownian motion. Bernoulli, 2007, **13:** 1023–1052

[8] Yan L, Gao B, Liu J. The Bouleau-Yor identity for a bi-fractional Brownian motion. Stochastics, 2014, **86:** 382–414

[9] Nualart D, Ortiz-Latorre S. Intersection local time for two indepandent fractional Brownian motions. J Theoret Probab, 2007, **20:** 759–767

[10] Wu D, Xiao Y. Regularity of intersection local times of fractional Brownian motions. J Theoret Probab, 2010, **23:** 972–1001

[11] Rosen J. The intersection local time of fractional Brownian motion in the plane. J Multivar Anal, 1987, **23:** 37–46

[12] Hu Y. On the self-intersection local time of fractional Brownian motions-via chaos expansion. J Math Kyoto Univ, 2001, **41:** 233–250

[13] Hu Y, Nualart D. Renormalized self-intersection local time for fractional Brownian motions. Ann Probab, 2005, **33:** 948–983

[14] Yan L, Yu X. Derivative for self-intersection local time of multidimensional fractional Brownian motion. Stochastics, 2015, **87:** 966–999

[15] Jiang Y, Wang Y. Self-intersection local times and collision local times of bifractional Brownian motions. Sci China Ser A, 2009, **52:** 1905–1919

[16] Shen G, Yan L. Smoothness for the collision local times of bifractional Brownian motions. Sci China Math, 2011, **54:** 1859-1873

[17] Yan L, Liu J, Chen C. On the collision local time of bifractional Brownian motions. Stoch Dyn, 2009, **9:** 479–491

[18] Yan L, Shen G. On the collision local time of sub-fractional Brownian Motions. Statist Probab Lett, 2010, **80:** 296–308

[19] Chen Z, Wu D, Xiao Y. Smoothness of local times and self–intersection local times of Gaussian random fields. Front Math China, 2015, **10:** 777–805

[20] Bourguin S, Tudor C A. On the law of the solution to a stochastic heat equation with fractional noise in time. Random Oper Stochastic Equations, 2015, **23:** 179–186

[21] Ouahhabi H, Tudor C A. Additive functionals of the solution to fractional stochastic heat equation. J Fourier Anal Appl, 2013, **19:** 777–791

[22] Tudor C A, Xiao Y. Sample paths of the solution to the fractional-colored stochastic heat equation. Stoch Dyn, 2017, **17:** 1–20

[23] Tudor C A. Chaos expansion and regularity of the local time of the solution to the stochastic heat equation with additive fractional-colored noise. Taiwanese J Math, 2013, **17:** 1765–1777

[24] Nualart D. Malliavin Calculus and Related Topics. New York: Springer-Verlag, 2006

[25] Tudor C A. Analysis of Variations for Self-Similar Processes: A Stochastic Calculus Approach. New York: Springer, 2013

Local Times of the Solution to Stochastic Heat Equation with Fractional Noise

[1]Wang Zhi [2]Yan Litan [3]Yu Xianye

([1]*School of Sciences, Ningbo University of Technology, Zhejiang Ningbo 315211;*
[2]*Department of Mathematics, College of Science, Donghua University, Shanghai 201620;*
[3]*School of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275*)

Abstract: In this paper, we study the collision and intersection local times of the solution to stochastic heat equation with additive fractional noise. We mainly prove its existence and smoothness properties through local nondeterminism and chaos expansion.

Key words: Stochastic heat equation; Fractional noise; Collision local time; Intersection local time; Chaos expansion.

MR(2010) Subject Classification: 60H15; 60J55