2019,**39A**(3):475–483

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

http://actams.wipm.ac.cn

临界情形下 Schrödinger-Maxwell 方程的基态解 *

[1] 方立婉　[2] 黄文念　[2] 汪敏庆

([1] 广西科技师范学院数学与计算机科学学院　广西来宾 546199; [2] 广西师范大学数学与统计学院　广西桂林 541004)

摘要：该文主要研究下面的 Schrödinger-Maxwell 方程

$$\begin{cases} -\triangle u+V(x)u-(K(x)+\alpha)\phi u=\beta|u|^4u+b(x)|u|^{p-1}u, & (x,u)\in(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}),\\ \triangle\phi=(K(x)+\alpha)u^2, & (x,u)\in(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}) \end{cases}$$

基态解的存在性，其中 β 是正常数．当 V 和 K 以及 $b(x)$ 满足某些假设条件时，运用变分法和临界点理论，可以证明当 $\alpha<0$ 和 $p\in(3,4)$ 时，上面的方程至少存在一个基态解.

关键词：Schrödinger-Maxwell 方程；临界点理论；临界情形；基态解；Nehari 流形.

MR(2010) 主题分类：39A05;39A14　**中图分类号**：O175.25　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2019)03-475-09

1　引言

在本文中，我们讨论下面系统基态解的存在性

$$\begin{cases} -\triangle u+V(x)u-(K(x)+\alpha)\phi u=\beta|u|^4u+b(x)|u|^{p-1}u, & (x,u)\in(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}),\\ \triangle\phi=(K(x)+\alpha)u^2, & (x,u)\in(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}), \end{cases}\tag{1.1}$$

其中 β 是正常数，$\alpha<0$ 且 $p\in(3,4)$. 对于 $V,K(x)$ 和 $b(x)$, 我们作如下假设：

(V_1) $V\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, 且 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^3}V(x)>0$, 对任一 $M>0, meas\{x\in\mathbb{R}^3|V(x)\leq M\}<\infty$.

(V_2) $V(\infty)=\lim\limits_{|x|\to\infty}\inf V(x)\geq V(x)$, 且 $V(x)\not\equiv V(\infty)$.

(K) $K(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, 且 $K(x)\leq 0, x\in\mathbb{R}^3$.

(B) $b(x):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^+$, 且 $b(x)\in L^{p+2}(\mathbb{R}^3)$.

收稿日期: 2017-04-28; 修订日期: 2018-06-20

E-mail: fangliwan1992@163.com; csuhuangwn@163.com; hgncwangmq@126.com

* 基金项目：广西师范大学科学研究基金 (2014ZD001) 、广西自然科学基金 (2015GXNSFBA139018) 和 2017 广西研究生教育创新计划项目 (XYCZ2017074)

Supported by the Science Research Fund of Guangxi Normal University (2014ZD001), the Natural Science Foundation of Guangxi (2015GXNSFBA139018) and the Postgraduate Education Innovation Plan Project of Guangxi in 2017 (XYCZ2017074)

当 $K(x)\equiv 0, x\in\mathbb{R}^3$, Zhang 在文献 [1] 中研究如下系统

$$\begin{cases} -\triangle u+V(x)u+\mu\phi u=f(u), & (x,u)\in(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}),\\ -\triangle\phi=\mu u^2, & (x,u)\in(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}), \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $V,\mu>0, f(u)$ 临界增长且为奇函数，运用变分形式山路定理，得到了系统 (1.2) 的正径向解和基态解的存在性. 而 Liu 和 Guo 在文献 [2] 中运用变分法研究下列临界点情形的 Schrödinger-Maxwell 系统

$$\begin{cases} -\triangle u+V(x)u+\lambda\phi u=\mu|u|^{q-1}u+|u|^4u, & (x,u)\in(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}),\\ -\triangle\phi=u^2, & (x,u)\in(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}), \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 μ 是一个正参数. 在 V 的适当假设下, 运用变分形式的山路定理, 当 $q\in(3,5)$ 或 $q\in(2,3]$, 且 μ 足够大的时候，对任一 $\lambda>0$, 系统 (1.3) 存在基态解 $(u,\phi_u)\in H^1(\mathbb{R}^3)\times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$.

当 $\alpha=0$ 时， Yang 和 Han 在文献 [3] 中研究如下系统

$$\begin{cases} -\triangle u+V(x)u+K(x)\phi u=f(x,u), & (x,u)\in(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}),\\ -\triangle\phi=K(x)u^2, & (x,u)\in(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}), \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $V>0, K(x)\geq 0$. 存在 $a_2>0, p\in(4,2^*)$, 使得 $|f(x,u)|\leq a_2(1+|u|^{p-1})$, 以及 $\lim\limits_{|u|\to 0}\frac{f(x,u)}{u}=0$, $\lim\limits_{|u|\to\infty}\frac{f(x,u)}{|u|^4}=+\infty$, 当 $u>0$ 时， $\frac{f(x,u)}{u^3}$ 递增， $u<0$ 时， $\frac{f(x,u)}{u^3}$ 递减，且存在 $\gamma>0$, 使得 $F(x,u)\geq-\gamma u^4(F(x,u)=\int_0^u f(x,s)\mathrm{d}s$. 运用山路定理和喷泉定理可得系统 (1.4) 在 $f(x,u)$ 关于 u 为奇函数的条件下平凡解和高能解的存在性和多重性.

自从系统 (1.1) 在文献 [5] 中提出来以后，就有很多学者研究其解的存在性和多重性，而更多的结论是关于非线性项只有一项，而且是次临界情形的，可详见文献 [5–12]. 本文的主要工作是运用山路定理研究临界情形下，具有两项非线性项的系统 (1.1) 基态解的存在性.

下面是本文的主要结论：

定理 1.1 若 $(V_1),(V_2)$, (K) 以及 (B) 成立， $p\in(3,4)$, 且 $\beta>0$, 则对每个 $\alpha<0$, 系统 (1.1) 至少存在一个基态解.

注 1.1 定理 1.1 是扩展 [1−3] 的结论. 相对于系统 (1.2), (1.3) 和 (1.4), 系统 (1.1) 所满足的条件较复杂，这使得证明基态解的存在性时较困难. 本文研究的系统与系统 (1.2), (1.3) 和 (1.4) 比较，创新点是同时满足以下两点：

a) Scrödinger-Maxwell 方程有两个参量 $K(x)$ 和 α, 且都小于 0.

b) 非线性项是非自治的，含有两项，且其中一项临界增长.

下面介绍本文将用到的一些记号.

记 Hilbert 空间 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 的范数如下：

$$\|u\|_1:=\left[\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}},$$

以及范数空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 的范数如下：

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^3):=\left\{u\in L^{2^*}(\mathbb{R}^3):\nabla u\in(L^2(\mathbb{R}^3))^3\right\}.$$

定义

$$E := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

在 E 上赋予积及由该积导出的范数为

$$(u,v) := \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv)\mathrm{d}x, \quad \forall u, v \in E.$$

$$\|u\| := (u,u)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in E.$$

由 (V_1) 知，下面的嵌入是紧嵌入：

$$E \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3), \quad p \in [2,6).$$

由变分法知，系统 (1.1) 对应的泛函为 $I(u,\phi) : E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$,

$$I(u,\phi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}|\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2}(K(x)+\alpha)\phi u^2 + \frac{\beta|u|^6}{6} + \frac{b(x)|u|^{p+1}}{p+1}\mathrm{d}x.$$

运用 Lax-Milgram 定理 [13], 对任一 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 存在唯一的 $\phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$[12], 使得

$$\Delta \phi_u = (K(x)+\alpha)u^2. \tag{1.5}$$

特别地， $\Delta\phi_u$ 如下表示

$$\phi_u = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} (K(y)+\alpha)\frac{u^2(y)}{|x-y|}\mathrm{d}y.$$

由 (1.5) 式，有

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_u|^2 \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^3} \Delta\phi_u \cdot \phi_u \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^3} (K(x)+\alpha)\phi_u u^2 \mathrm{d}x,$$

从而

$$\Phi(u) = I(u,\phi) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(x)+\alpha}{4}\phi_u u^2 \mathrm{d}x - \frac{\beta}{6}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 \mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} b(x)|u|^{p+1}\mathrm{d}x.$$

显然， $\Phi(u)$ 是 C^1 - 泛函，导数如下：

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\nabla u \nabla v + V(x)uv - (K(x)+\alpha)\phi_u uv - |u|^4 uv - b(x)|u|^{p-1}uv\right]\mathrm{d}x, \quad u, v \in E.$$

相应的 Nehari 流形如下：

$$\mathcal{N} = \{u \in E \setminus \{0\} : (\Phi'(u), u) = 0\}.$$

2 定理 1.1 的证明

引理 2.1[14] 对于任一 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 下面的命题成立：

(i) $\phi_u \geq 0$.

(ii) $\|\phi_u\|_{D^{1,2}} \leq C\|u\|^2_{\frac{12}{5}} \leq C\|u\|^2$.

(iii) 若 $u_n \rightharpoonup u$, 则 $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$.

引理 2.2[16] 若 Φ 是一个 Banach 空间中的 C^1 - 泛函，存在 0 的邻域 $\Omega \subset E$ 以及常数 ρ, 使得

$$\Phi(u) \geq \rho > \Phi(0), \quad \forall u \in \partial\Omega.$$

以及存在 $v \notin \Omega$, 使得

$$\Phi(v) < \rho.$$

其中

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{s\in[0,1]} \Phi(\gamma(s)) \geq \rho,$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0\ ,\ \gamma(1) = v\}.$$

则存在序列 $\{u_n\} \subset E$ 使得

$$\Phi(u_n) \to c, \quad \Phi'(u_n) \to 0. \tag{2.1}$$

令

$$E_0 = \left\{u \in E \setminus \{0\} : \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(x)+\alpha}{4}\phi_u u^2 \mathrm{d}x + \frac{\beta t^2}{6}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 \mathrm{d}x > 0, \quad t > 0\right\}.$$

显然， $E_0 \neq \emptyset$. 对任一 $u \in E_0$, 记

$$m_e := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(x)+\alpha}{4}\phi_u u^2 \mathrm{d}x + \frac{\beta t^2}{6}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 \mathrm{d}x > 0.$$

引理 2.3 假设 $(V_1),(V_2)$, (K) 和 (B) 成立，则对 $\forall u \in E$, 存在常数 $\rho, r > 0$, 且 $\|u\| = r$ 时，有 $\Phi(u) \geq \rho > 0$.

证 对任一 $u \in E$, 由 $\alpha < 0$, (K), (B), 有

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\beta}{6}\|u\|_6^6 - \frac{1}{p+1}\|b(x)\|_{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+1}\\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\beta}{6}\|u\|^6 - C\|u\|^{p+1}\\ &= \|u\|^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{6}\|u\|^4 - C\|u\|^{p-1}\right).\end{aligned}$$

故 $\Phi(u) > 0$. 其中 $\|u\| = r, 0 < r < \min\left\{1, \sqrt{\frac{-3C+3\sqrt{C^2+\frac{\beta}{3}}}{\beta}}\right\}, p \in (3,4)$. ∎

引理 2.4 若 $(V_1),(V_2)$, (K) 和 (B) 成立，则对任一 $e \in E_0$. 存在 $r > 0$ (如引理 2.3 定义), 使得

$$\Phi(v) \leq 0, \quad v = te, \quad t > 0 \in \mathbb{R}, \quad 且\ \ \|v\| > r.$$

证 由 (B) 和 Hölder 不等式，有

$$\int_{\mathbb{R}^3} b(x)|u|^{p+1}\mathrm{d}x \leq \|b(x)\|_{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+1}.$$

则对任一 $e \in E_0, t > 0$, 有

$$\begin{aligned}\Phi(te) &= \frac{t^2}{2}\|e\|^2 - t^4\int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(x)+\alpha}{4}\phi_e e^2 \mathrm{d}x - \frac{\beta t^6}{6}\int_{\mathbb{R}^3} |e|^6 \mathrm{d}x - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} b(x)|e|^{p+1}\mathrm{d}x\\ &\leq \frac{t^2}{2}\|e\|^2 - t^4\int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(x)+\alpha}{4}\phi_e e^2 \mathrm{d}x - \frac{\beta}{6}t^6\int_{\mathbb{R}^3} |e|^6 \mathrm{d}x + \frac{t^{p+1}}{p+1}\|b(x)\|_{p+1}\|e\|_{p+2}^{p+1}.\end{aligned}$$

因为 $\alpha<0,p\in(3,4)$, 所以由 (K), 得

$$\begin{aligned}\Phi(te)&\le\frac{t^2}{2}\|e\|^2+Ct^2\|e\|^{p+1}-t^4\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{K(x)+\alpha}{4}\phi_e e^2+\frac{\beta t^6}{6}t^2|e|^6\mathrm{d}x\right)\\&=t^2\left(\frac{1}{2}\|e\|^2+C\|e\|^{p+1}\right)-m_e t^4\to-\infty,\quad t\to\infty.\end{aligned}$$

取 $v=te$. 证毕.

引理 2.5　若 $(V_1),(V_2)$, (K) 和 (B) 成立，则引理 2.2 的结论成立.

证　显然 $\Phi(0)=0$. 由引理 2.3 和引理 2.4, Φ 满足引理 2.2 的条件, 故存在序列 $\{u_n\}\subset E$, 使得 (2.1) 式成立.

下面说明 Φ 的 $(PS)_c$ 序列有界.

引理 2.6　若 $(V_1),(V_2)$, (K) 和 (B) 成立，则任一满足 (2.1) 式的 $\{u_n\}\subset E$ 有界.

证　任取 $\{u_n\}$ 满足 (2.1) 式，则 $-\langle\Phi'(u_n),u_n\rangle\le o(1)\|u_n\|$, 且存在 $M>0$, 使得 $|\Phi(u_n)|\le M$. 由 (K) 和 (B), 有

$$\begin{aligned}(p+1)M+o(1)\|u_n\|&\ge(p+1)\Phi(u_n)-\langle\Phi'(u_n),u_n\rangle\\&=\frac{(p+1)}{2}\|u_n\|^2+\frac{3-p}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(K(x)+\alpha)\phi_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x+\frac{5-p}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\\&\ge\frac{p+1}{2}\|u_n\|^2,\end{aligned}$$

其中，$\alpha<0,\beta>0,p\in(3,4)$. 故 $\{u_n\}$ 有界.

引理 2.7　若 $(V_1),(V_2)$, (K) 和 (B) 成立，则 $\{u_n\}$ 的子列 $\{u_n^*\}$ 强收敛，即存在 $u^*\in E$ 使得

$$u_n^*\to u^*.$$

更进一步地，有

$$\Phi(u^*)=c.$$

证　根据引理 2.6 可知，满足 (2.1) 式的 $\{u_n\}$ 有界，即 $\|u_n\|<\infty$. 根据 E 的自反性, 设 $\{u_n\}$ 的子列 $\{u_n^*\}$ 满足

$$\begin{aligned}&u_n^*\rightharpoonup u^*,\quad u^*\in E.\\&u_n^*\to u^*,\quad u^*\in L^t(\mathbb{R}^3),\quad t\in(2,6).\\&u_n^*\to u^*,\quad a.e.\ \ u^*\in\mathbb{R}^3.\end{aligned}\tag{2.2}$$

不难验证 $\Phi'(u^*)=0$. 由引理 2.1 的 (ii) 和 (iii), 得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi_{u_n^*}|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\le C\|u_n^*\|^2_{\frac{12}{5}}\le C\|u_n^*\|^2.$$

因为 $\|u_n^*\|<\infty$, 由 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}(\phi_{u_n^*}u_n^*)^2\mathrm{d}x&\le\left(\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n^*}^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^*|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\\&\le C\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi_{u_n^*}|^2\mathrm{d}x\|u_n^*\|^2\le C\|u_n^*\|^6<\infty.\end{aligned}$$

故

$$\phi_{u_n^*}u_n^* \rightharpoonup \phi_{u^*}u^*, \quad u^* \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

从而对任一 $w \in E$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n^*}u_n^* w\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u^*}u^* w\mathrm{d}x.$$

联立 (2.2) 式以及紧性原理 [15], 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n^*}(u_n^*)^2\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u^*}(u^*)^2\mathrm{d}x.$$

另一方面,

$$\int_{\mathbb{R}^3} b(x)|u_n^*|^{p+1}\mathrm{d}x \le \|b(x)\|_{p+2}\|u_n^*\|_{p+2}^{p+1} \le C\|u_n^*\|^{p+1} < \infty.$$

由 (2.2) 式，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3} b(x)|u_n^*|^{p+1}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} b(x)|u^*|^{p+1}\mathrm{d}x.$$

记 $v_n^* = u_n^* - u^*$. 根据上面的讨论和 Brezi-Lieb 引理 [16], 有

$$\begin{aligned} c - \Phi(u^*) &= \Phi(u_n^*) - \Phi(u^*) + o(1) \\ &= \frac{1}{2}(\|u_n^*\|^2 - \|u^*\|^2) - \frac{\beta}{6}\int_{\mathbb{R}^3}(u_n^*)^6 - (u^*)^6\mathrm{d}x + o(1) \\ &= \frac{1}{2}\|v_n^*\|^2 - \frac{\beta}{6}\int_{\mathbb{R}^3}(v_n^*)^6\mathrm{d}x + o(1) \end{aligned}$$

且

$$o(1) = \langle\Phi'(u_n^*), u_n^*\rangle - \langle\Phi'(u^*), u^*\rangle = \|v_n^*\|^2 - \beta\int_{\mathbb{R}^3}(v_n^*)^6\mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

由引理 2.1, 有

$$-\int_{\mathbb{R}^3}(K(x)+\alpha)\phi_{u^*}(u^*)^2\mathrm{d}x \le C\|u^*\|^4.$$

记 $S = \inf\limits_{u_n\in D^{1,2}\setminus\{0\}}\frac{\|\nabla u_n\|^2}{\|u_n\|_6^2}$. 类似文献 [1] 的讨论，对任一 $\epsilon, r > 0$, 定义

$$u_\epsilon(x) = \frac{\psi(x)\epsilon^{\frac{1}{4}}}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \psi(x) \in C_0^\infty(B_{2r}(0)).$$

其中， $0 \le \psi(x) \le 1$, 且在 $B_r(0)$ 中 $\psi(x) = 1$. 由 Aubin 定理知， S 可由 $\frac{\epsilon^{\frac{1}{4}}}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}$ 获得. 由估计，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_\epsilon|^2\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^3}\mathrm{d}x + O(\epsilon^{\frac{1}{2}}),$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}|u_\epsilon|^6\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(1+|x|^2)^3}\mathrm{d}x,$$

故

$$S + O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_\epsilon|^2\mathrm{d}x}{(\int_{\mathbb{R}^3}u_\epsilon^6\mathrm{d}x)^{\frac{1}{3}}}.$$

令

$$y(t)=\frac{t^2}{2}\|u_\epsilon\|^2-\|u_\epsilon\|^2,\qquad t>0.$$

当 $t_0=\big(\frac{\|u_\epsilon\|^2}{\beta\int_{\mathbb{R}^3}u_\epsilon^6\mathrm{d}x}\big)^{\frac{1}{2}}$ 时， $y(t)$ 取到最大值 $y(t_0)=\frac{1}{3}\big(\frac{\|u_\epsilon\|^2}{(\beta\int_{\mathbb{R}^3}u_\epsilon^6\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}}\big)^{\frac{3}{2}}=\big(\frac{S^3}{9\beta}\big)^{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned}\sup_{t\ge0}\Phi(tu_\epsilon)&=\sup_{t\ge0}\left(\frac{t^2}{2}\|u_\epsilon\|^2-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{K(x)+\alpha}{4}t^4\phi_{u_\epsilon}u_\epsilon^2\mathrm{d}x-\frac{t^6\beta}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u_\epsilon|^6\mathrm{d}x\right.\\&\quad\left.-\frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u_\epsilon|^{p+1}\mathrm{d}x\right)\\&=\sup_{t\ge0}\left(y(t)-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{K(x)+\alpha}{4}t^4\phi_{u_\epsilon}u_\epsilon^2\mathrm{d}x-\frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u_\epsilon|^{p+1}\mathrm{d}x\right)\\&\le\sup_{t\ge0}\left(y(t)-t^4\|u_\epsilon\|^4-\frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u_\epsilon|^{p+1}\mathrm{d}x\right)\\&<\sup_{t\ge0}y(t)\\&=(\frac{S^3}{9\beta})^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

由 (2.1) 式，知 $c<(\frac{S^3}{9\beta})^{\frac{1}{2}}$. 因为 $\Phi'(u^*)=0$, 根据引理 2.6 的讨论，有

$$\Phi(u^*)\ge0,$$

故

$$c-\Phi(u^*)<(\frac{S^3}{9\beta})^{\frac{1}{2}}.$$

设 $\|v_n^*\|^2\to l\ge0$. 由 (2.3) 式，我们有

$$\beta\int_{\mathbb{R}^3}(v_n^*)^6\mathrm{d}x\to l\ge0.$$

若 $l>0$, 由 Sobolev 嵌入定理，有 $S\le\frac{\|v_n^*\|^2}{(\int_{\mathbb{R}^3}|v_n^*|^6\mathrm{d}x)^{\frac{1}{3}}}$. 从而

$$l\ge(\frac{S^3}{\beta})^{\frac{1}{2}},$$

故

$$c-\Phi(u^*)=\frac{1}{3}l\ge(\frac{S^3}{9\beta})^{\frac{1}{2}}.$$

矛盾. 从而 $l=0$, 即 $\|v_n^*\|\to0$, 亦即 $u_n^*\to u^*,u^*\in E,\Phi(u^*)=c$. 证明完毕. ▮

定理 1.1 的证明 首先说明 Φ 存在临界点. 由引理 2.6 知， Φ 有有界的 $(PS)_c$ 序列. 由引理 2.7 知存在 $u^*\in E,u^*\neq0$. 使得

$$\Phi(u^*)=c,\qquad\Phi'(u^*)=0.$$

即存在 Φ 的临界点 $u^*\neq0$.

下面说明系统 (1.1) 存在基态解.

记

$$m_{\mathcal{N}} = \inf \Phi(u), \quad u \in \mathcal{N}.$$

根据引理 2.7 的讨论，我们有

$$0 < m_{\mathcal{N}} \le \Phi(u) < \frac{S^{\frac{3}{2}}}{3\beta^{\frac{1}{2}}}.$$

记 $\{v_n\}$ 是 Φ 的非平凡临界点序列，满足

$$\Phi(v_n) \to m_{\mathcal{N}}.$$

因为 $\Phi(v_n)$ 有界，故由引理 2.6 的讨论知， $\{v_n\}$ 在 E 上有界．因此 $\{v_n\}$ 是 Φ 的 $(PS)_c$ 序列．由系统 (2.1) 和引理 2.7, 有

$$\Phi(v_n) \to \Phi(v_0) + \sum_{i=1}^{i=k} \Phi^{\infty}(w^i) = c + o(1), \tag{2.4}$$

其中 v_0 是 Φ 的临界点， $k \ge 0, w^i$ 是 Φ^{∞} 的临界点， Φ^{∞} 如下定义：

$$\begin{aligned}\Phi^{\infty}(u) = &\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(\infty)u^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(x)+\alpha}{4}\phi_u u^2 \mathrm{d}x - \frac{\beta}{6}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 \mathrm{d}x \\ &-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} b(x)|u|^{p+1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令

$$m^{\infty} = \inf\{\Phi^{\infty}(u) : u \ne 0, \Phi'^{\infty}(u) = 0\},$$

根据条件 (V_2), 当 $V(x) \not\equiv V(\infty)$ 时，由引理 2.7, $m_{\mathcal{N}} \le c < m^{\infty}$. 因为对任一 $i, \Phi^{\infty}(w^i) \ge m^{\infty} > 0$. 由 (2.1) 和 (2.4) 式知， $k = 0$, 且 $\Phi(v_0) = m_{\mathcal{N}}$. 从而 $v_n \to v_0$. 故对任一 $u \in \mathcal{N}$, 有

$$\begin{aligned}0 = \Phi'(u)u &= \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^3} (K(x)+\alpha)\phi_u u^2 \mathrm{d}x - \beta\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} b(x)|u|^{p+1}\mathrm{d}x \\ &\ge \|u\|^2 - C\beta\|u\|^6 - C\|u\|^{p+1}.\end{aligned}$$

故存在常数 c_0, 使得对任一 $u \in \mathcal{N}$, 有 $\|u\| \ge c_0$. 因此， Φ 的任一极值点列不为零，从而，$v_0 \ne 0$. 证明完毕. ▌

参 考 文 献

[1] Zhang J. On the Schrödinger-Poisson equations with a general nonlinearity in the critical growth. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2012, **75**: 6391–6401

[2] Liu Z S, Guo S J. On ground state solutions for the Schrödinger-Poisson equations with critical growth. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, **412**: 435–448

[3] Yang M H, Han Z Q. Existence and multiplicity results for the nonlinear Schrödinger-Poisson systems. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012, **13**: 1093–1101

[4] Benci V, Fortunato D. An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations. Topological Methods Nonlinear Analysis, 1998, **11**: 283–293

[5] Huang W N, Tang X H. Ground-state solutions for asymptotically cubic Schrödinger-Maxwell equations. Mediterranean Journal of Mathematics, 2016, **13**: 3469–3481

[6] Tang X H. Non-Nehari manifold method for asymptotically linear Schrödinger equation. Journal of the Australian Mathematical Society, 2015, **98**: 104–116

[7] Tang X H. Non-Nehari manifold method for superlinear Schrödinger equation. Taiwanese Jounal of Mathematics, 2014, **18**: 1957–1979
[8] Kikuchi H. On the existence of solution for elliptic system related to the Maxwell-Schrödinger equations. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2007, **67**: 1445–1456
[9] Bartsch T, Wang Z Q, Willem M. The Dirichlet problem for superlinear elliptic equations//Mawhin J, et al. Stationary Partial Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2005, **2**: 1–55
[10] Azzollini A, D'Avenia P. On a system involving a critically growing nonlinearity. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, **387**: 433–438
[11] Zhao L G, Zhao F K. On the existence of solutions for the Schrödinger-oisson equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, **346**: 155–169
[12] Ruiz D. The Schrödinger-Possion equation under the effect of a nonlinear local term. Journal of functional analysis, 2006, **237**: 655–674
[13] Yosida K. Functional Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995
[14] Cerami G, Vaira G. Positive solutions for some non-autonomous Schrödinger-Poisson systems. Journal of Differential Equations, 2010, **248**: 521–543
[15] Berestycki H, Lions P L. Nonlinear scalar field equations. I. existence of a ground state. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1983, **82**: 313–345
[16] Willem M. Minimax Theorems. New York: Springer, 1997
[17] Adams R A, Fournier J F. Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 2003

Ground-State Solutions for Schrödinger-Maxwell Equations in the Critical Growth

[1]Fang Liwan [2]Huang Wennian [2]Wang Minqing
([1]*School of Mathematics and Computer Science, Guangxi Science and Technology Normal University; Guangxi Laibin 546199;*
[2]*School of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guangxi Guilin 541004*)

Abstract: In this paper, we study the existence of the ground state solutions for the following Schrödinger-Maxwell equations

$$\begin{cases} -\triangle u + V(x)u - (K(x)+\alpha)\phi u = \beta |u|^4 u + b(x)|u|^{p-1}u, & (x,u) \in (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \\ \triangle \phi = (K(x)+\alpha)u^2, & (x,u) \in (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \end{cases}$$

where β is a positive constant. Under some assumptions on V, K and $b(x)$, by using the variational method and critical point theorem, we prove that such a class of equations has at least a ground state solution for $\alpha < 0$ and $p \in (3,4)$.

Key words: Schrödinger-Maxwell equations; Critical point theorem; Critical growth; Ground state solution; Nehari manifold.
MR(2010) Subject Classification: 39A05; 39A14