2019,**39A**(3):451–460

数学物理学报 Acta Mathematica Scientia

http://actams.wipm.ac.cn

一类广义浅水波 KdV 方程的可积性研究 *

[1] 郝晓红 [2] 程智龙 **

([1] 苏州大学文正学院 江苏苏州 215104; [2] 苏州科技大学数理学院 江苏苏州 215009)

摘要：该文应用双 Bell 多项式，系统研究了一类广义浅水波 KdV 方程的可积性. 先构造出双线性表达式、 Bäklund 变换，再通过 Bäklund 变换线性化得到孤子解与 Lax 对. 最后通过级数展开式代入得到无穷守恒律，从而证明此方程具有可积性.

关键词：Bäklund 变换； Lax 对；无穷守恒律.

MR(2010) 主题分类：35C15 **中图分类号**：O175.24 **文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2019)03-451-10

1 引言

近几十年以来，通过双线性方法 [1−3,5], Bäcklund 变换 [6−10,19], 黎曼 θ 函数法 [5−8] 等研究非线性偏微分方程中可积性 [9,12] 与精确解 [4−9,15−17,19] 越来越受到一些专家学者的关注.

1996 年， Lambert, Gilson 和 Nimmo 建立了 Bell 多项式与 Hirota 双线性算子之间的关系 [14], 通过转换关系得到双线性 Bäcklund 变换，这个方法很有效地避免了求 Bäcklund 变换过程中使用交换公式繁琐的计算，简洁实用. 并且直接对其做线性化还可以得到方程的 Lax 对 [9,12], 最后将级数展开式代入计算求解得到方程的无穷守恒律.

本文重点应用 Bell 多项式研究一类广义浅水波 KdV 方程

$$r_t-\alpha r_{xxt}-4\alpha rr_t-2\alpha r_x\int_x^{\infty}r_t\mathrm{d}x+\alpha r_x+\beta r_{xxx}+6\beta rr_x=0, \tag{1.1}$$

其中 α 与 β 是任意的非零常数. 方程 (1.1) 包涵一些特殊的物理方程：

(i) 当 α=0, β=1 时

$$r_t+r_{xxx}+6rr_x=0, \tag{1.2}$$

即为 KdV 方程 [1−3];

(ii) 当 α=1, β=0 时

$$r_t-r_{xxt}-4rr_t-2r_x\int_x^{\infty}r_t\mathrm{d}x+r_x=0, \tag{1.3}$$

收稿日期: 2017-04-10; 修订日期: 2018-10-08

E-mail: zhilong0793@sina.cn; haoxiaohong200866@163.com

* 基金项目：安徽省自然科学研究项目 (KJ2016A071)

Supported by the Natural Science Foundation of Anhui Province (KJ2016A071)

** 通讯作者

即为浅水波方程 [1,4]. Ablowitz 等用反散射法研究了此类方程 [13]. Gilson, Nimmo 和 Willox 考虑其 Wronskian 形式的孤子解 [18]. Shang 和 Hong 通过其次平衡法与扩展双曲函数法得到大量的精确解与 Bäcklund 变换形式 [19], Wazwaz 则应用简化形式的 Hirota 双线性法求解出 N- 孤子解 [4].

本文重点研究方程 (1.1) 的可积性，即为双线性表达式、 Bäcklund 变换、 Lax 对与无穷守恒律. 本文结构如下：第二部分给出必要 Bell 多项式的定义与性质；第三部分应用 Bell 多项式法研究其可积性；最后部分给出结论与参考文献.

2 多维双 Bell 多项式

首先我们先给出 Bell 多项式的定义以及性质：

定义 2.1 设 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是具有 n 个变量的 $\mathcal{C}^\infty$ 函数，则称

$$Y_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(f)\equiv Y_{n_1,\cdots,n_l}(f_{r_1x_1,\cdots,r_lx_l})=e^{-f}\partial_{x_1}^{n_1}\cdots\partial_{x_l}^{n^l}e^f \tag{2.1}$$

为 Bell 多项式 [9,14]. 其中 $f_{r_1x_1,\cdots,r_lx_l}=\partial_{x_1}^{n_1}\cdots\partial_{x_l}^{n^l}f(r_1=0,\cdots,n_1;\cdots;r_l=0,\cdots,n_l.)$. 当 $f=f(x,t)$ 时，对应的 2- 维 Bell 多项式，举例为

$$\begin{aligned}&Y_x(f)=f_x,\qquad Y_{2x}(f)=f_{2x}+f_x^2,\qquad Y_{x,t}(f)=f_{x,t}+f_xf_t,\\&Y_{2x,t}(f)=f_{2x,t}+f_{2x}f_t+2f_{x,t}f_x+f_x^2f_t,\\&Y_{3x}(f)=f_{3x}+3f_{2x}f_x+f_x^3,\qquad\cdots.\end{aligned}\tag{2.2}$$

定义 2.2 基于上述 Bell 多项式定义，多维的双 Bell 多项式定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(v,w)&=Y_{n_1,\cdots,n_l}(f)|_{f_{r_1x_1,\cdots,r_lx_l}}\\&=\begin{cases}v_{r_1x_1,\cdots,r_lx_l},\ r_1+r_2+\cdots+r_l\ \text{为奇数},\\w_{r_1x_1,\cdots,r_lx_l},\ n_1+n_2+\cdots+n_l\ \text{为偶数},\end{cases}\end{aligned}\tag{2.3}$$

则双 Bell 多项式可以表示为函数具有 v 和 w 的形式，举例为

$$\begin{aligned}&\mathcal{Y}_x(v)=v_x,\qquad\mathcal{Y}_{2x}(v,w)=w_{2x}+v_x^2,\qquad\mathcal{Y}_{x,t}(v,w)=w_{xt}+v_xv_t,\\&\mathcal{Y}_{2x,t}(v,w)=v_{2x,t}+w_{2x}v_t+2w_{xt}v_x+v_x^2v_t,\\&\mathcal{Y}_{3x}(v,w)=v_{3x}+3v_xw_{2x}+v_x^3,\qquad\cdots.\end{aligned}\tag{2.4}$$

定义 2.3 $\mathcal{Y}$ 多项式和 Hirota 双线性 D 算子之间的关系可由如下等式得出

$$\mathcal{Y}_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(v=\ln F/G,w=\ln FG)=(FG)^{-1}D_{x_1}^{n_1}\cdots D_{x_l}^{n_l}F\cdot G,\tag{2.5}$$

其中 $n_1+n_2+\cdots+n_l\geq 1$. 算子 $D_{x_1},\cdots,D_{x_l}$ 为 Hirota 双线性算子定义为

$$D_{x_1}^{n_1}\cdots D_{x_l}^{n_l}F\cdot G=(\partial_{x_1}-\partial_{x_1'})^{n_1}\cdots(\partial_{x_l}-\partial_{x_l'})^{n_l}F(x_1,\cdots,x_l)\times G(x_1',\cdots,x_l')\,|_{x_1'=x_1,\cdots,x_l'=x_l}\,.$$

特别的，当 $F=G$ 时， (2.5) 式则化为

$$\begin{aligned}(F)^{-2}D_{x_1}^{n_1}\cdots D_{x_l}^{n_l}F\cdot F&=\mathcal{Y}_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(0,q=2\ln F)\\&=\begin{cases}0, & n_1+n_2+\cdots+n_l\ \text{为奇数},\\P_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(q), & n_1+n_2+\cdots+n_l\ \text{为偶数}.\end{cases}\end{aligned}\tag{2.6}$$

称之为 P 多项式，此类多项式具有易于被识别的偶数部分划分结构的特点，如

$$\begin{aligned}&P_{2x}(q)=q_{2x}, \qquad P_{x,t}(q)=q_{xt},\\&P_{4x}(q)=q_{4x}+3q_{2x}^2, \qquad P_{6x}(q)=q_{6x}+15q_{2x}q_{4x}+15q_{2x}^3\cdots.\end{aligned} \tag{2.7}$$

定义 2.4　双 Bell 多项式 $\mathcal{Y}_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(v,w)$ 可分离成 P 多项式和 Y 多项式的组合形式

$$\begin{aligned}&(FG)^{-1}D_{x_1}^{n_1}\cdots D_{x_l}^{n_l}F\cdot G\\&=\mathcal{Y}_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(v,w)|_{v=\ln F/G,w=\ln FG}=\mathcal{Y}_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(v,v+q)|_{v=\ln F/G,q=2\ln G}\\&=\sum_{n_1+\cdots+n_l=even}\sum_{r_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{r_l=0}^{n_l}\prod_{i=1}^{l}(n_i,r_i)'P_{r_1x_1,\cdots,r_lx_l}(q)Y_{(n_1-r_1)x_1,\cdots,(n_l-r_l)x_l}(v),\end{aligned} \tag{2.8}$$

注意

$$Y_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(v)|_{v=\ln\psi}=\frac{\psi_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}}{\psi}, \tag{2.9}$$

这意味着一个 Bell 多项式 $\mathcal{Y}_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(v,w)$ 可以通过 Hopf-Cole 变换 $v=\ln\psi$ (即 $\psi=F/G$) 进行线性化. 性质 (2.8) 、 (2.9) 在推导孤子方程的 Lax 对时起到重要作用.

接着应用 Bell 多项式求解无穷守恒律时，只需作一个新的变量变换

$$\eta=\frac{(q'_{x_k}-q_{x_k})}{2}, \tag{2.10}$$

这里 q 和 q' 满足 $q=w-v$, $q'=w+v$, x_k 是 $x_1,\cdots,x_l$ 中任意随机变量. 则由条件

$$C(q',q)=E(q')-E(q)=0 \tag{2.11}$$

出发可以得到一组约束条件，只要把这一组约束条件化为 Bell 多项式以及关于某个变量的微分的形式，即一个 Riccati 方程

$$\eta_{x_k}+f(\eta)=0 \tag{2.12}$$

和一个离散型的方程

$$\partial_{x_1}F_1(\eta)+\cdots+\partial_{x_l}F_l(\eta)=0. \tag{2.13}$$

然后，通过将级数展开式代入计算就可以从中导出非线性方程的守恒律.

3　一类广义浅水波 KdV 方程

令 $r(x,t)=u_x(x,t)$, 方程 (1.1) 化成

$$u_{xt}-\alpha u_{xxxt}-4\alpha u_xu_{xt}-2\alpha u_{xx}u_t+\alpha u_{xx}+\beta u_{xxxx}+6\beta u_xu_{xx}=0, \tag{3.1}$$

在本部分，通过 Bell 多项式的应用，给出方程 (3.1) 双线性表达式， Bäklund 变换， Lax 对和无穷守恒律.

3.1　双线性表达式

定理 3.1　作 $u=q_x$, 变换，方程 (3.1) 线性化为

$$\begin{aligned}&(D_x^4+D_xD_z)G\cdot G=0,\\&[D_xD_t+\alpha(-\frac{2}{3}D_tD_x^3+\frac{1}{3}D_tD_z+D_x^2)+\beta D_x^4]G\cdot G=0,\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 z 为辅助变量.

证 为了得到方程 (3.1) 的双线性化表达式，首先引入一个辅助变量 q, 且令

$$u=cq_x, \tag{3.3}$$

其中 c 是一个待选择的可以与方程 (3.1) P - 多项式相关联的常数．将方程 (3.3) 代入方程 (3.1), 得到

$$q_{2x,t}+\alpha(-\frac{2}{3}q_{4x,t}-2cq_{3x}q_{xt}-4cq_{2x}q_{2x,t}-\frac{1}{3}q_{4x,t}+q_{3x})+\beta(q_{5x}+6cq_{2x}q_{3x})=0, \tag{3.4}$$

并将其对 x 积分一次可得

$$E(q)\equiv q_{xt}+\alpha\big(-\frac{2}{3}(q_{3x,t}+3cq_{2x}q_{xt})-\frac{1}{3}\partial_x^{-1}\partial_t(q_{4x}+3cq_{2x}^2)+q_{2x}\big)+\beta(q_{4x}+3cq_{2x}^2)=0, \tag{3.5}$$

应用性质 (2.7), 得 $c=1$, 则方程 (3.5) 可化为

$$E(q)\equiv q_{xt}+\alpha\big(-\frac{2}{3}(q_{3x,t}+3q_{2x}q_{xt})-\frac{1}{3}\partial_x^{-1}\partial_t(q_{4x}+3q_{2x}^2)+q_{2x}\big)+\beta(q_{4x}+3q_{2x}^2)=0. \tag{3.6}$$

为了将方程 (3.6) 写成双线性形式，需要消除 ∂_x^{-1} 积分项，为此引入一个辅助变量 z, 并附加一个约束条件

$$q_{4x}+3q_{2x}^2=-q_{xz}, \tag{3.7}$$

那么，方程 (3.6) 可化为

$$E(q)\equiv q_{xt}+\alpha\big(-\frac{2}{3}(q_{3x,t}+3q_{2x}q_{xt})+\frac{1}{3}q_{tz}+q_{2x}\big)+\beta(q_{4x}+3q_{2x}^2)=0. \tag{3.8}$$

依据性质 (2.5), 方程 (3.7) 与方程 (3.8) 可被转化成如下 P - 多项式组合形式

$$\begin{aligned}&P_{4x}(q)+P_{xz}(q)=0,\\&P_{xt}(q)+\alpha(-\frac{2}{3}P_{3x,t}(q)+\frac{1}{3}P_{tz}(q)+P_{2x}(q))+\beta P_{4x}(q)=0.\end{aligned} \tag{3.9}$$

最后，由性质 (2.6), 在因变量变换

$$q=2\ln G\Longleftrightarrow u=cq_x=2(\ln G)_x \tag{3.10}$$

作用下， (3.9) 式可得方程 (3.1) 的双线性形式：

$$\begin{aligned}&(D_x^4+D_xD_z)G\cdot G=0,\\&[D_xD_t+\alpha(-\frac{2}{3}D_tD_x^3+\frac{1}{3}D_tD_z+D_x^2)+\beta D_x^4]G\cdot G=0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

证毕. ▌

3.2 Bäcklund 变换，孤子解与 Lax 对

定理 3.2 假设 F 为双线性方程 (3.11) 的一个解，如果 G 满足

$$\begin{aligned}&(D_x^2-\lambda)F\cdot G=0,\\&[(1-3\alpha\lambda)D_t+(\alpha+3\beta\lambda)D_x-\alpha D_x^2D_t+\beta D_x^3]F\cdot G=0,\end{aligned} \tag{3.12}$$

则 G 即为方程 (3.11) 的另解，其中 λ 为任意参数.

证 令 q 和 q' 为方程 (3.6) 的两个不同的解

$$q = 2\ln F, \qquad q' = 2\ln G, \tag{3.13}$$

相应地，引入两个新的变量

$$w = \frac{q'+q}{2} = \ln(FG), \qquad v = \frac{q'-q}{2} = \ln(\frac{F}{G}), \tag{3.14}$$

则二场条件为

$$\begin{aligned} E(q') - E(q) &= E(w+v) - E(w-v) \\ &= 2v_{xt} + \alpha[-2v_{3x,t} - 4w_{2x}v_{x,t} - 4w_{x,t}v_{2x} \\ &\quad -4\partial_x^{-1}(w_{2x}v_{2x,t} + w_{2x,t}v_{2x}) + 2v_{xx}] + \beta(2v_{4x} + 12w_{xx}v_{xx}) \\ &= 2\partial_x[\mathcal{Y}_t(v) - \alpha\mathcal{Y}_{2x,t}(v,w) + \beta\mathcal{Y}_{3x}(v,w)] + R(v,w) = 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中

$$\begin{aligned} R(v,w) = {} & \alpha\big(2\partial_x[(w_{2x} + v_x^2)v_t] - 4w_{2x}v_{xt} + 4w_{2x,t}v_x - 4\partial_x^{-1}(w_{2x}v_{2x,t} + w_{2x,t}v_{2x}) + 2v_{xx}\big) \\ & +6\beta(w_{2x}v_{xx} - v_xw_{3x} - v_x^2v_{2x}). \end{aligned}$$

这个二场条件可以认为是在适当限制条件下便于求得 Bäcklund 变换.

为了将二场条件 (3.15) 写成一对限制条件，可加入一个限制条件，则 $R(v,w)$ 可以表示成 $\mathcal{Y}$- 多项式的 x- 导数结合形式. 可选

$$\mathcal{Y}_{2x}(v,w) = w_{2x} + v_x^2 = \lambda, \tag{3.16}$$

其中 λ 为任意参数. 由 (3.16) 式， $R(v,w)$ 可化为

$$\begin{aligned} R(v,w) &= \alpha[2\lambda v_{xt} - 4w_{2x}v_{xt} + 4w_{2x,t}v_x - 4\partial_x^{-1}(w_{2x}v_{2x,t} + w_{2x,t}v_{2x}) + 2v_{xx}] \\ &\quad +6\beta(w_{2x}v_{xx} - v_xw_{3x} - v_x^2v_{2x}) \\ &= -6\alpha\lambda v_{xt} + 2\alpha v_{2x} + 6\beta\lambda v_{2x}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

此处应用 $w_{2x,t} = -2v_xv_{xt}$ 与 $w_{2x} = \lambda - v_x^2$.

结合 (3.15)–(3.17) 式，可得到 $\mathcal{Y}$ - 多项式系统

$$\begin{aligned} & \mathcal{Y}_{2x}(v,w) - \lambda = 0, \\ & \partial_x[(1-3\alpha\lambda)\mathcal{Y}_t(v) + (\alpha+3\beta\lambda)\mathcal{Y}_x(v) - \alpha\mathcal{Y}_{2x,t}(v,w) + \beta\mathcal{Y}_{3x}(v,w)] = 0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中第二个方程保留导数形式, 这在之后的求解方程的守恒律时是非常重要. 应用性质 (2.5), 从方程 (3.15) 可立即得到双线性 Bäcklund 变换

$$\begin{aligned} & (D_x^2 - \lambda)F\cdot G = 0, \\ & [(1-3\alpha\lambda)D_t + (\alpha+3\beta\lambda)D_x - \alpha D_x^2D_t + \beta D_x^3]F\cdot G = 0, \end{aligned} \tag{3.19}$$

其中我们对系统 (3.18) 中第二个方程 x 进行积分. ▍

通过此 Bäcklund 变换，我们可以很容易的求出其孤子解．接下来我们以一孤子解与二孤子解为例.

从平凡解 $u(x,t)=0$ 出发，选择 $F=1$, 代入方程 (3.19), 可得方程 (3.19) 的另解，令 $\lambda=\frac{k_1^2}{4}$, 解得

$$G_1=e^{\frac{\xi_1}{2}}+e^{-\frac{\xi_1}{2}},\quad \xi_1=k_1x-\frac{\alpha k_1+\beta k_1^3}{1-\alpha k_1^2}t+\xi_1^{(0)},\tag{3.20}$$

其中 $k_1,\xi_1^{(0)}$ 为任意实数．方程 (3.20) 化为

$$G_1=e^{-\frac{\xi_1}{2}}(1+e^{\xi_1}),\tag{3.21}$$

依据 (3.13) 式有 $q'=2\ln G$, (3.3) 式有 $u=q_x$, (3.1) 式有 $r=u_x$ 得一孤子解为

$$r=2\ln[1+e^{k_1x-\frac{\alpha k_1+\beta k_1^3}{1-\alpha k_1^2}t+\xi_1^{(0)}}]_{xx},\tag{3.22}$$

再令 $F=e^{\frac{\xi_1}{2}}+e^{-\frac{\xi_1}{2}}$, 可得解

$$G_2=(k_1-k_2)(e^{\frac{\xi_1+\xi_2}{2}}+e^{-\frac{\xi_1+\xi_2}{2}})-(k_1+k_2)(e^{\frac{\xi_1-\xi_2}{2}}+e^{-\frac{\xi_1-\xi_2}{2}}),\quad \lambda=\frac{k_2^2}{4},\tag{3.23}$$

其中 $\xi_j=k_jx-\frac{\alpha k_j+\beta k_j^3}{1-\alpha k_j^2}t+\xi_j^{(0)}, j=1,2.$

作变换 $\xi_j=\eta_j+\frac{1}{2}A_{12}$ 其中 $e^{A_{12}}=\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}, j=1,2$, 则 (3.23) 式可化为

$$G_2=1+e^{\eta_1}+e^{\eta_2}+e^{\eta_1+\eta_2+A_{12}},\tag{3.24}$$

其对应方程的二孤子解

$$r=2\ln[1+e^{\eta_1}+e^{\eta_2}+e^{\eta_1+\eta_2+A_{12}}]_{xx}.\tag{3.25}$$

接下来求解三孤子解，将 $F=(k_1-k_2)(e^{\frac{\xi_1+\xi_2}{2}}+e^{-\frac{\xi_1+\xi_2}{2}})-(k_1+k_2)(e^{\frac{\xi_1-\xi_2}{2}}+e^{-\frac{\xi_1-\xi_2}{2}})$ 代入方程组 (3.19), 可得

$$\begin{aligned}G_3=&a(e^{\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{2}}+e^{-(\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{2}})+b(e^{\frac{-\xi_1+\xi_2+\xi_3}{2}}+e^{-\frac{-\xi_1+\xi_2+\xi_3}{2}})\\&+c(e^{\frac{\xi_1-\xi_2+\xi_3}{2}}+e^{-\frac{\xi_1-\xi_2+\xi_3}{2}})+d(e^{\frac{\xi_1+\xi_2-\xi_3}{2}}+e^{-\frac{\xi_1+\xi_2-\xi_3}{2}}),\end{aligned}\tag{3.26}$$

其中

$$\begin{aligned}&a=(k_1-k_2)(k_1-k_3)(k_2-k_3),\quad b=(k_1+k_2)(k_1+k_3)(k_2-k_3),\\&c=(k_1+k_2)(k_1-k_3)(k_2+k_3),\quad d=(k_1-k_2)(k_1+k_3)(k_2+k_3)\end{aligned}$$

和 $\xi_j=k_jx-\frac{\alpha k_j+\beta k_j^3}{1-\alpha k_j^2}t+\xi_j^{(0)}$ $(j=1,2,3)$.

以此类推，得出 N- 孤子解为

$$\begin{aligned}&G_n=\sum_{\epsilon=\pm1}\prod_{1\le j<l}^{n}\epsilon_l(\epsilon_jk_j-\epsilon_lk_l)e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\epsilon_j\xi_j},\\&\xi_j=k_jx-\frac{\alpha k_j+\beta k_j^3}{1-\alpha k_j^2}t+\xi_j^{(0)}\ (j=1,2,\cdots,n),\quad \lambda=\frac{k_n^2}{4},\end{aligned}\tag{3.27}$$

其中 $\sum\limits_{\epsilon=\pm 1}$ 表示的是 $\epsilon_j = 1, -1$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 的所有可能形式.

接下来，我们求解方程 (3.1) 的 Lax 对.

定理 3.3 方程 (3.1) Lax 对为

$$\begin{aligned} &L\psi = \psi_{xx} + (u_x - \lambda)\psi = 0, \\ &M\psi = (1 - 3\alpha\lambda - u_x)\psi_t + (\alpha + 3\beta\lambda + 3\beta u_x - 2\alpha u_t)\psi_x - \alpha\psi_{xxt} + \beta\psi_{xxx} = 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

其中 λ 任意参数.

证 由 Hopf-Cole 变换 $v = \ln\psi$, 由公式 (2.8) 和 (2.9) 可得

$$\begin{aligned} &\mathcal{Y}_x(v) = \frac{\psi_x}{\psi}, \qquad \mathcal{Y}_t = \frac{\psi_t}{\psi}, \qquad \mathcal{Y}_{2x}(v,w) = q_{2x} + \frac{\psi_{2x}}{\psi}, \\ &\mathcal{Y}_{3x}(v,w) = 3q_{2x}\frac{\psi_x}{\psi} + \frac{\psi_{3x}}{\psi}, \qquad \mathcal{Y}_{2x,t}(v,w) = 2q_{xt}\frac{\psi_x}{\psi} + q_{2x}\frac{\psi_t}{\psi} + \frac{\psi_{2x,t}}{\psi}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

结合 (3.29) 式， (3.19) 式可被线性化为带有参数 λ 的系统

$$L\psi = 0, \qquad M\psi = 0, \tag{3.30}$$

其中

$$\begin{aligned} &L = \partial_x^2 + q_{2x} - \lambda, \\ &M = (1 - 3\alpha\lambda - q_{2x})\partial_t + (\alpha + 3\beta\lambda + 3\beta q_{2x} - 2\alpha q_{xt})\partial_x - \alpha\partial_t\partial_x^2 + \beta\partial_x^3, \end{aligned} \tag{3.31}$$

用 q_x 代替 u

$$\begin{aligned} &L\psi = \psi_{xx} + (u_x - \lambda)\psi = 0, \\ &M\psi = (1 - 3\alpha\lambda - u_x)\psi_t + (\alpha + 3\beta\lambda + 3\beta u_x - 2\alpha u_t)\psi_x - \alpha\psi_{xxt} + \beta\psi_{xxx} = 0. \end{aligned} \tag{3.32}$$

得出 Lax 对，且容易验证相容性条件

$$[L, M] = q_{2x,t} + \alpha(-q_{4x,t} - 4q_{2x}q_{2x,t} - 2q_{3x}q_{xt} + q_{3x}) + \beta(q_{5x} + 6q_{2x}q_{3x}) = 0. \tag{3.33}$$

证毕. ∎

3.3 无穷守恒律

定理 3.4 方程 (3.1) 具有如下无穷守恒律

$$I_{n,t} + F_{n,x} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{3.34}$$

其中守恒密度 I_n 递推公式为

$$\begin{aligned} &I_1 = -\frac{1}{2}u_x, \qquad I_2 = -\frac{1}{2}I_{1,x} = \frac{1}{4}u_{2x}, \\ &\cdots\cdots \\ &I_n = -\frac{1}{2}\left[I_{n-1,x} + \sum_{k=1}^{n} I_k I_{n-1-k}\right], \ n = 2, 3, 4, \cdots. \end{aligned} \tag{3.35}$$

连带流 F_n 递推关系为

$$
\begin{aligned}
&F_1=-\frac{1}{2}[\alpha(u_x-u_{xxt}-2\partial_x^{-1}(u_xu_{xt})-2u_tu_x)+\beta(u_{3x}+3u_x^2)],\\
&\cdots\cdots\\
&F_n=\alpha\bigg[I_n-I_{n,xt}+4\partial_x^{-1}\bigg(\sum_{k=1}^{n}I_kI_{n+1-k,t}\bigg)+4\partial_x^{-1}\bigg(\sum_{k=1}^{n}I_{k,t}\bigg)I_{n+1-k}\\
&\qquad+4\partial_x^{-1}\bigg(\sum_{i+j+k=n}I_iI_{j,t}I_k\bigg)\bigg]\\
&\qquad+\beta\bigg(I_{n,2x}-2\sum_{i+j+k=n}I_iI_jI_k-6\sum_{k=1}^{n}I_kI_{n+1-k}\bigg),\ n=2,3,4,\cdots.
\end{aligned}\tag{3.36}
$$

证 首先从公式 (3.19) 出发，由关系 $\partial_x\mathcal{Y}_t(v)=\partial_t\mathcal{Y}_x(v)=v_{xt}$, 则 (3.19) 式可化为

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Y}_{2x}(v,w)-\lambda=0,\\
&\partial_t(1-3\alpha\lambda)\mathcal{Y}_x+\partial_x[(\alpha+3\beta\lambda)\mathcal{Y}_x(v)-\alpha\mathcal{Y}_{2x,t}(v,w)+\beta\mathcal{Y}_{3x}(v,w)]=0.
\end{aligned}\tag{3.37}
$$

引入一个势函数

$$\eta=\frac{q'_x-q_x}{2},\tag{3.38}$$

那么从关系式 (3.15) 可得到

$$v_x=\eta,w_x=q_x+\eta,\tag{3.39}$$

将 (3.39) 式代入 (3.37) 式，可得到一个 Riccati - 类型的方程

$$\eta_x+\eta^2+q_{2x}=\lambda\tag{3.40}$$

和一个离散型方程

$$(1-4\alpha\lambda)\eta_t+\partial_x\{(\alpha+6\beta\lambda)\eta-\alpha\eta_{xt}+4\alpha[\partial_x^{-1}(\eta\eta_t)]\eta+\beta\eta_{2x}-2\beta\eta^3\}=0,\tag{3.41}$$

其中我们取 $\lambda=\varepsilon^2$.

进一步，在 $\eta=\varepsilon+\tilde\eta$ 变换下， (3.40) 式和 (3.41) 式可化为

$$\tilde\eta_x+\tilde\eta^2+2\varepsilon\tilde\eta+q_{xx}=0\tag{3.42}$$

和

$$\tilde\eta_t+\partial_x\{\alpha\tilde\eta-\alpha\tilde\eta_{xt}+4\alpha\partial_x^{-1}(\tilde\eta\tilde\eta_t)\varepsilon+4\alpha\partial_x^{-1}(\varepsilon\tilde\eta_t+\tilde\eta\tilde\eta_t)\tilde\eta+\beta\tilde\eta_{2x}-2\beta\tilde\eta^3-6\beta\varepsilon\tilde\eta^2\}=0.\tag{3.43}$$

将级数展开式

$$\tilde\eta=\sum_{n=1}^{\infty}I_n(q,q_x,\cdots)\varepsilon^{-n}\tag{3.44}$$

代入 (3.42) 式且令上式中 ε 的幂次系数相等，就可以得到守恒密度 I_n 的递推关系式

$$
\begin{aligned}
&I_1=-\frac{1}{2}u_x,\qquad I_2=-\frac{1}{2}I_{1,x}=\frac{1}{4}u_{2x},\\
&I_3=-\frac{1}{2}(I_{2,x}+I_1^2)=-\frac{1}{8}(u_{xxx}+u_x^2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&I_4=-\frac{1}{2}(I_{3,x}+2I_1I_2)=\frac{1}{16}(u_{4x}+4u_xu_{2x}), \qquad (3.45)\\
&\cdots\cdots\\
&I_n=-\frac{1}{2}[I_{n-1,x}+\sum_{k=1}^{n}I_kI_{n-1-k}], n=2,3,4,\cdots.
\end{aligned}
$$

再将展开式 (3.44) 代入 (3.43) 式，则有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}I_{n,t}\varepsilon^{-n}+\partial_x\Bigg[\alpha\sum_{n=1}^{\infty}I_n\varepsilon^{-n}-\alpha\sum_{n=1}^{\infty}I_{n,xt}\varepsilon^{-n}+4\alpha\partial_x^{-1}\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty}I_n\varepsilon^{-n}\sum_{n=1}^{\infty}I_{n,t}\varepsilon^{-n}\Bigg)\cdot\varepsilon\\
&+4\alpha\partial_x^{-1}\Bigg(\varepsilon\cdot\sum_{n=1}^{\infty}I_{n,t}\varepsilon^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}I_n\varepsilon^{-n}\sum_{n=1}^{\infty}I_{n,t}\varepsilon^{-n}\Bigg)\sum_{n=1}^{\infty}I_n\varepsilon^{-n}+\beta\sum_{n=1}^{\infty}I_{n,2x}\varepsilon^{-n}\\
&-2\beta\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty}I_n\varepsilon^{-n}\Bigg)^3-6\beta\varepsilon\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty}I_n\varepsilon^{-n}\Bigg)^2\Bigg]=0, \qquad (3.46)
\end{aligned}
$$

即为无穷守恒律

$$
I_{n,t}+F_{n,x}=0,\quad n=1,2,3,\cdots, \qquad (3.47)
$$

在无穷守恒律 (3.47) 中， (3.45) 式给出守恒密度 I_n, 连带流 F_n 即为

$$
\begin{aligned}
&F_1=-\frac{1}{2}[\alpha(u_x-u_{xxt}-2\partial_x^{-1}(u_xu_{xt})-2u_tu_x)+\beta(u_{3x}+3u_x^2)],\\
&F_2=\frac{1}{4}[\alpha(u_{2x}-u_{3x,t}-4(u_xu_{xt})-2u_tu_{2x})+\beta(u_{4x}+6u_xu_{2x})],\\
&\cdots\cdots\\
&F_n=\alpha\Bigg[I_n-I_{n,xt}+4\partial_x^{-1}\Bigg(\sum_{k=1}^{n}I_kI_{n+1-k,t}\Bigg)+4\partial_x^{-1}\Bigg(\sum_{k=1}^{n}I_{k,t}\Bigg)I_{n+1-k} \qquad (3.48)\\
&\qquad+4\partial_x^{-1}\Bigg(\sum_{i+j+k=n}I_iI_{j,t}I_k\Bigg)\Bigg]\\
&\qquad+\beta\Bigg(I_{n,2x}-2\sum_{i+j+k=n}I_iI_jI_k-6\sum_{k=1}^{n}I_kI_{n+1-k}\Bigg),\ n=2,3,4,\cdots.
\end{aligned}
$$

据此可以验证 (3.47) 式的第一个方程即为方程 (3.1). ▌

参 考 文 献

[1] Hirota R. The Direct Method in Soliton Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2004

[2] Guo Y C. Nonlinear Partial Differential Equations. Beijing: Tsinghua University Press, 2008

[3] Ma W X, Wu H Y. Solving the Korteweg-De Vries equation by its bilinear form: Wronskian solutions. Transactions of the American Mathematical Society, 2004, **375**(5): 1753–1778

[4] Wazwaz A M. N-soliton solutions for shallow water waves equations in $(1+1)$ and $(2+1)$-dimensions. Appiedl Mathematics Computation, 2011, **217**: 8840–8845

[5] Zhang Y, Cheng Z L. Exact soliton solutions and quasi-periodic wave solutions to the forced vc-KdV equation. Intern J Mod Phys B, 2012, **26**: 1250072

[6] Zhang Y, Cheng D Y. Bäcklund transformation and soliton solutions for the shallow water waves equation. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, **20**: 343–351

[7] Cheng Z L, Hao X H. The periodic wave solutions for a $(2+1)$-dimensional AKNS equation. Appl Math Comput, 2014,**234**: 118–126

[8] Zhang Y, Cheng Z L, Hao X H. Riemann theta functions periodic wave solutions for the variable-coefficient mKdV equation. Chin Phys B, 2012, **21**: 120203

[9] 郝晓红，程智龙．(2 + 1) 维 AKNS 方程的可积性研究．动力学与控制学报，2018, **16**(3): 201–205
Hao X H, Cheng Z L. Research on integrability of a (2 + 1)-dimensional AKNS equation. Journal of Dynamics and Control, 2018, **16A**(3): 201–205

[10] Hirota R. A new form of Bäcklund transformations and its relation to the inverse scattering problem. Prog Theor Phys, 1974, **52**: 1498–1512

[11] Ma W X. Bilinear equations and resonant solutions characterized by Bell polynomials. Reports on Mathematical Physics, 2013, **72**: 41–56

[12] Fan E G, Chow K W. Darboux covariant Lax pairs and infinite conservation laws of the (2+1)-dimensional breaking soliton equation. J Math Phys, 2011, **52**: 023504

[13] Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C, Segur H. The inverse scattering transform: fourier analysis nonlinear problems. Stud Appl Math, 1974, **53**: 249–315

[14] Gilson C R, Lambert F, Nimmo J J C, Willox R. On the combinatorics of the Hirota D-operators. Proc R Soc Lond A, 1996, **452**: 223–234

[15] Cheng Z L, Hao X H. The travelling wave solutions for a (2 + 1)-dimensional AKNS equation. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2015, **3**(30): 323–329

[16] Ma W X, Lee J H. A transformed rational function method and exact solutions to the 3 + 1 dimensional Jimbo-Miwa equation. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, **42**: 1356–1363

[17] Ma W X. Lump solutions to the Kadomtsev-Petviashvili equation. Phys Lett A, 2015, **379**(36): 1975–1978

[18] Gilson C R, Nimmo J J C, Willox R A. (2 + 1)-dimensional generalization of the AKNS shallow water wave equation. Phys Lett A, 1993, **180**: 337–345

[19] Shang Y D, Huang Y. Bäcklund transformations and abundant explicit exact solutions for the AKNS-SWW equation. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2011, **16**, 2445–2455

The Integrability of the KdV-Shallow Water Waves Equation

[1]Hao Xiaohong [2]Cheng Zhilong

([1]*Wenzheng College of Soochow University, Jiangsu Suzhou 215104;*
[2]*School of Mathematics and Physics, Suzhou University of Sience and Technology, Jiangsu Suzhou 215009*)

Abstract: In this paper, the binary Bell polynomials to construct bilinear forma, bilinear Bäcklund transformation, Lax pair of the KdV-shallow water waves equation. Through bilinear Bäcklund transformation, some soliton solutions are presented. Moreover, the infinite conservation laws are also derived by Bell polynomials, all conserved densities and fluxes are given with explicit recursion formulas.

Key words: Bäcklund transformation; Lax pair; Infinite conservation laws.

MR(2010) Subject Classification: 35C15